

SÉRIE A, N° 1686

N° D'ORDRE :

2552

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

M. René REULOS

1^{re} THÈSE. — ETUDE SUR UNE NOUVELLE MÉTHODE D'INTÉGRATION
DES ÉQUATIONS DE MAXWELL.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le **Janvier 1937** devant la Commission d'examen.

MM. CH. FABRY *Président.*

H. VILLAT } *Examineurs.*
L. DE BROGLIE }

PARIS

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

1937

SÉRIE A, N° 1686

N° D'ORDRE :

2552

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

M. René REULOS

1^{re} THÈSE. — ETUDE SUR UNE NOUVELLE MÉTHODE D'INTÉGRATION
DES ÉQUATIONS DE MAXWELL.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le, Janvier 1937 devant la Commission d'examen.

MM. Ch. FABRY *Président.*

H. VILLAT } *Examinateurs*

L. DE BROGLIE }

PARIS

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

1937

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire M. MOLLIARD.
Doyen C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe

<i>Professeurs honoraires</i>	{	H. LEBESGUE.	GUILLET.	JANET
		A. FERNBACH.	PÉCHARD.	LESPIEAU.
		A. LEDUC.	FREUNDLER.	MARCHIS.
		Émile PICARD.	AUGER.	VESSIOT.
		Rémy PERRIER.	BLAISE.	PORTIER.
		Léon BRILLOUIN.	DANGEARD.	

PROFESSEURS

G. BERTRAND.....	T	Chimie biologique.	M. JAVILLIER.....	Chimie biologique.
M. CAULLERY.....	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).	L. JOLEAUD.....	Paléontologie.
G. URBAIN.....	T	Chimie générale.	ROBERT-LÉVY....	Zoologie.
Émile BOREL.....	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	F. PICARD.....	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Jean PERRIN.....	T	Chimie physique.	Henri VILLAT.....	T Mécanique des fluides et applications.
H. ABRAHAM.....	T	Physique.	Ch. JACOB.....	T Géologie.
E. CARTAN.....	T	Géométrie supérieure.	P. PASCAL.....	T Chimie minérale.
M. MOLLIARD.....	T	Physiologie végétale.	M. FRÉCHET.....	T Calcul différentiel et Calcul intégral.
L. LAPICQUE.....	T	Physiologie générale.	E. ESCLANGON....	T Astronomie.
A. COTTON.....	T	Recherches physiques.	M ^{me} RAMART-LUCAS	T Chimie organique.
J. DRACH.....	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	H. BÉGHIN.....	T Mécanique physique et expérimentale.
Charles FABRY....	T	Enseignement de Physique.	FOCH.....	Mécanique expérimentale des fluides.
Charles PÉREZ....	T	Zoologie.	PAUTHENIER.....	Physique (P. C. B.).
Léon BERTRAND..	T	Géologie structurale et géologie appliquée.	De BROGLIE.....	T Théories physiques.
E. RABAUD.....	T	Biologie expérimentale.	CHRÉTIEN.....	Optique appliquée.
M. GUICHARD.....		Chimie minérale.	P. JOB.....	Chimie générale.
Paul MONTEL.....	T	Théorie des fonctions et Théorie des transformations.	LABROUSTE.....	Physique du Globe.
P. WINTREBERT..	T	Anatomie et histologie comparées.	PRENANT.....	Zoologie.
L. BLARINGHEM..	T	Botanique.	VILLEY.....	Mécanique physique et expérimentale.
O. DUBOSCQ.....	T	Biologie maritime.	BOHN.....	Zoologie (P. C. B.).
G. JULIA.....	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.	COMBES.....	Botanique (P. C. B.).
C. MAUGUIN.....	T	Minéralogie.	GARNIER.....	T Mathématiques générales.
A. MICHEL-LÉVY..	T	Pétrographie.	PÈRES.....	Mécan. théor. des fluides.
H. BÉNARD.....	T	Mécanique expérimentale des fluides.	HACKSPILL.....	Chimie (P. C. B.).
A. DENJOY.....	T	Application de l'analyse à la Géométrie.	LAUGIER.....	Physiologie générale.
L. LUTAUD.....	T	Géographie physique et géologie dynamique.	TOUSSAINT.....	Technique Aéronautique.
Engène BLOCH....	T	Physique théorique et physique céleste.	M. CURIE.....	Physique (P. C. B.).
G. BRUHAT.....		Physique.	G. RIBAUD.....	T Hautes températures.
E. DARMOIS.....		Enseignement de Physique.	CHAZY.....	T Mécanique rationnelle.
A. DEBIERNE.....	T	Physique Générale et Radioactivité.	GAULT.....	Chimie (P. C. B.).
A. DUFOUR.....	T	Physique (P. C. B.).	CROZE.....	Recherches physiques.
L. DUNOYER.....		Optique appliquée.	DUPONT.....	T Théories chimiques.
A. GUILLIERMOND.	T	Botanique.	LANQUINE.....	Géologie.
			VALIRON.....	Mathématiques générales.
			BARRABÉ.....	Géologie structurale et géologie appliquée.
			MILLOT.....	Zoologie (P. C. B.).
			F. PERRIN.....	Théories physiques.
			VAVON.....	Chimie organique.
			G. DARMOIS.....	Calcul des Probabilités et Physique-mathématique.

Secrétaire..... A. PACAUD.
Secrétaire honoraire..... D. TOMBECK.



*A cette première page de ma thèse, je tiens à inscrire le nom
du Maître éminent :*

Monsieur Charles Fabry,

Membre de l'Institut,

*dont l'enseignement lumineux et les conseils bienveillants ont
facilité mes débuts dans la recherche scientifique.*

*Avec l'expression de ma vive gratitude et de mon déferent
attachement.*

René Reulos.

A MONSIEUR
LOUIS DE BROGLIE

MEMBRE DE L'INSTITUT

*Je dédie cette thèse, en hommage de reconnaissance
et de profonde admiration.*

René Reulos.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552819_0049

A MES PARENTS



ÉTUDE SUR UNE NOUVELLE MÉTHODE D'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE MAXWELL

ET SON APPLICATION
AU CALCUL DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE
DE L'ÉLECTRON EN MOUVEMENT

Par M. RENÉ REULOS

PRÉFACE

On sait que la théorie électromagnétique associe au mouvement des charges électriques, un double champ vectoriel, appelé souvent champ électromagnétique, composé du champ électrique et du champ magnétique. Ces deux champs vérifient dans tout l'espace un système d'équations aux dérivées partielles, linéaires, du premier ordre : les *Equations de Maxwell*. La connaissance de la répartition dans l'espace du champ électrique et du champ magnétique entourant, à un instant donné, une charge électrique dont on connaît le mouvement, est un problème fondamental en électromagnétisme et cette notion est à la base même de l'interprétation donnée par Maxwell des phénomènes d'induction.

Lorsque la charge électrique est animée d'un mouvement rectiligne uniforme, le problème ne présente pas de difficulté, la solution la plus élégante est fournie par la théorie de la relativité, qui permet de passer du champ électrostatique au

champ électromagnétique par un simple changement de système de référence.

Dans le cas où la charge est animée d'un mouvement quelconque, les équations de Maxwell ont pu être intégrées au moyen de la méthode ingénieuse des *potentiels retardés*, qui a fourni la première interprétation de la théorie du rayonnement. L'expression des champs en un point P de l'espace s'obtient à partir d'un « *potentiel scalaire* » et d'un « *potentiel vecteur* » qui prennent naissance constamment sur l'électron et se propagent par ondes sphériques, à la vitesse de la lumière. Les potentiels qui arrivent au point P, à l'instant t proviennent donc d'une position antérieure de l'électron : la *position retardée* ; ainsi *les ondes de potentiel qui atteignent les différents points de l'espace, à un instant donné, proviennent de positions retardées généralement différentes*. Cette méthode ne donne donc pas une vue d'ensemble des champs, à un instant donné, mais tout au plus, les valeurs que prennent ceux-ci aux différents points de l'espace, aux moments où ces points sont atteints par « l'onde de potentiel », au cours de sa propagation. Lorsque le mouvement est rectiligne et uniforme, il est possible d'exprimer les « coordonnées retardées » en fonction des « coordonnées actuelles » de l'électron. Les formules se simplifient et donnent vraiment l'ensemble du champ électromagnétique (formules de Thomson), lorsque le mouvement est quelconque, les calculs sont beaucoup plus compliqués et le problème n'a pu être résolu dans toute sa généralité.

Une autre particularité de cette méthode est d'impliquer une hypothèse sur la nature de l'électron, qui est traité comme une goutte ou une bulle d'électricité, celle-ci étant assimilée à un milieu continu, afin d'introduire la notion de densité électrique à l'intérieur même des corpuscules élémentaires. Cette hypothèse destinée à utiliser à l'échelle atomique une méthode qui avait été imaginée à propos des courants électriques, n'est pas sans présenter quelque inconvénient ; en

effet, comme l'a fait remarquer Larmor : *Si l'électricité peut s'expliquer par des électrons, l'électron ne s'explique pas en fin de compte comme étant de l'électricité.*

Le problème qui nous intéressait étant resté sans solution, nous avons imaginé une méthode nouvelle permettant d'intégrer les équations de Maxwell et d'obtenir la répartition dans l'espace, à un instant donné, du champ électrique et du champ magnétique entourant une charge électrique dont on connaît le mouvement, en évitant toute hypothèse sur la nature de l'électron. Il nous a fallu entreprendre, auparavant, une petite étude sur les suites de vecteurs dont chaque terme est le tourbillon du terme suivant et établir les résultats qui sont à la base de notre théorie. Parmi ces suites de tourbillon, il en existe une de tout à fait remarquable, à partir de laquelle on peut déduire, par des dérivations convenables, les termes successifs qui composent le développement du champ magnétique et du champ électrique et cela, dans le cas le plus général, sous réserve, bien entendu, des difficultés qui pourront se rencontrer, dans chaque cas particulier, lorsqu'on cherchera à effectuer tous les calculs.

Nous avons appliqué cette méthode au calcul du champ de l'électron en mouvement sur un axe. Nous obtenons des résultats assez inattendus : le champ électrique et le champ magnétique se présentent chacun sous la forme d'une série à double entrée où figurent notamment la distance r d'un point du champ à l'électron, la vitesse V du corpuscule à l'instant considéré et ses dérivées successives $\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \dots, \Gamma^{(n)} \dots$ par rapport au temps, par l'intermédiaire des groupements sans dimensions : $\beta = \frac{V}{c}, \gamma = \frac{\Gamma r}{c^2}, \gamma' = \frac{\Gamma' r^2}{c^3} \dots$ etc... (c étant la vitesse de la lumière dans le vide). Les lignes du tableau ainsi formé sont ordonnées suivant les puissances croissantes de $1/c$ et les colonnes, suivant les puissances croissantes de r . Les termes disposés suivant une même ligne contiennent une même puissance de r , ils se laissent sommer

facilement et donnent des fonctions algébriques. Le champ électrique est contenu dans des plans passant par l'axe. Le terme en $1/r^2$ est radical, on retrouve la *formule de Thomson*, que donnent les théories classiques; ce terme est seul à subsister lorsque le mouvement est uniforme, il est encore prépondérant à une distance de l'électron assez faible pour qu'on puisse négliger γ devant β . Plus loin, il faut tenir compte du champ en $1/r$ dû à l'accélération et qui présente en outre une composante tangentielle. Les lignes de forces s'incurvent sous l'influence de l'accélération, comme si elles présentaient un effet d'inertie. A mesure que l'on s'éloigne, il faut introduire de nouveaux termes, mais les termes en r^{-2} et ceux en r^{-1} sont les plus intéressants, car ils prédominent dans la région de l'espace où ont lieu les actions électromagnétiques entre courants fermés ainsi que les phénomènes d'induction entre courants variables dont ils fournissent une interprétation facile.

Le champ magnétique est perpendiculaire aux plans passant par l'axe, ses lignes de forces sont des cercles de révolution autour de cet axe.

Lorsque le mouvement cesse d'être rectiligne, les calculs se compliquent évidemment, mais les résultats les plus intéressants restent acquis, notamment en ce qui concerne la distribution des champs à faible distance de l'électron et leur rôle dans le mécanisme des phénomènes d'induction.

Notre méthode, que l'on pourrait appeler : *méthode des séries de tourbillons*, nous a permis de reprendre la théorie électromagnétique sur des bases nouvelles et de traiter ainsi quelques questions restées jusqu'ici sans réponse, mais nous ne croyons pas avoir épuisé le sujet; il serait par exemple intéressant d'étudier le champ à grande distance de l'électron, sur des exemples simples, tels que ceux que fournissent certains mouvements périodiques, et d'analyser l'interprétation que donne cette théorie sur le mécanisme du rayonnement et la répartition dans l'espace de l'énergie électroma-

gnétique. Nous avons entrepris cette étude et nous avons déjà acquis quelques résultats : c'est ainsi que nous nous sommes aperçus que les termes de la série de tourbillons à partir de laquelle on calcule les champs, dans le cas le plus général, sont aussi ceux qui composent le champ électromagnétique lointain, de l'oscillateur linéaire harmonique. Toutefois, la mise au point de ces questions nous aurait entraîné à prolonger notre travail au delà des limites qui nous étaient accordées. Nous y reviendrons par la suite, si nous en avons le loisir.

Nous sommes heureux d'exprimer ici notre respectueuse gratitude envers nos maîtres : MM. Ch. Fabry et P. Langevin, membres de l'Institut, qui ont accueilli favorablement nos idées et nous ont encouragé à en poursuivre les développements. Nous sommes particulièrement obligés envers M. Louis de Broglie, membre de l'Institut, qui a bien voulu s'intéresser à ce travail, le revoir dans ses détails, et nous apporter l'appui de sa haute autorité. Nous remercions également nos maîtres de la Faculté de Grenoble, de la Sorbonne et du Collège de France, qui nous ont initié à la Science et nous ont appris à goûter aux joies qu'elle procure.

CHAPITRE PREMIER

Les équations de Maxwell du point de vue classique.

Avant d'exposer nos idées sur les équations de Maxwell, il nous a paru intéressant de rappeler brièvement les solutions classiques, au cours de ce chapitre, qui est d'ailleurs indépendant du reste de l'ouvrage.

§ 1. Les équations de Maxwell et la théorie continue. — La théorie électromagnétique de Maxwell assimile l'électricité à un milieu continu réparti dans l'espace avec une certaine *densité* ρ ; un élément de volume $d\tau$ entourant le point M où la densité est ρ posséderait la charge $dq = \rho d\tau$. L'électricité en mouvement constitue un *courant électrique*. Si $\vec{V}$ est la vitesse de l'électricité au point M de l'espace où la densité est ρ , le vecteur $\vec{i} = \rho \vec{V}$ est le *vecteur courant*. La quantité d'électricité qui traverse une surface pendant une seconde est égale au flux du vecteur courant à travers cette surface.

Maxwell associe à tout courant électrique le *champ électrique* $\vec{E}$ et le *champ magnétique* $\vec{H}$ définis dans tout l'espace à l'aide des équations que nous écrivons sous la forme vectorielle :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi\rho \frac{\vec{V}}{c} = \text{rot } \vec{H} & (1) \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\text{rot } \vec{E} & (2) \end{array} \right. \quad \begin{array}{ll} \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho & (3) \\ \text{div } \vec{H} = 0 & (4) \end{array}$$

Les équations (3) et (4) appelées équations complémentaires sont en réalité les conditions d'intégrabilité ⁽¹⁾ des équations précédentes. La constante c dont les dimensions sont celles d'une vitesse a pour valeur $c = 3.10^{10}$ unités C. G. S. ϵ est la constante diélectrique du milieu, μ la perméabilité magnétique. Dans le vide, $\epsilon = \mu = 1$.

Une charge électrique dq animée d'une vitesse $\vec{V}$ dans une région de l'espace où règne un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{H}$ est soumise à la force :

$$(II) \quad \vec{F} = q(\vec{E} + \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{H}).$$

C'est donc par l'intermédiaire de ces champs que les charges électriques agissent à distance les unes sur les autres.

Les équations (I) et (II) expliquent les lois de l'électromagnétique et de l'induction. La force due au champ magnétique étant perpendiculaire à la vitesse *ne fournit aucun travail*, le travail de la force électromagnétique qui s'exerce sur une charge unité qui décrit un circuit fermé se réduit au travail du champ électrique le long du circuit, ou encore, au

flux de son rotationnel, le vecteur $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ à travers ce circuit, en vertu de la deuxième équation de Maxwell et du théorème d'Ampère et Stokes. *C'est la loi de l'induction*. Lorsque le champ électrique est nul, il reste la force :

$$\vec{F} = \frac{q}{c} \vec{V} \times \vec{H}.$$

En remarquant que $\frac{q\vec{V}}{c}$ représente le vecteur courant exprimé

(1) Dans le cas des champs non statiques.

en unités électromagnétiques, on retrouve la *Loi de Laplace*, qui donne l'action d'un champ magnétique sur un élément de courant.

Il reste à connaître le moyen d'intégrer les équations de Maxwell, afin de pouvoir calculer la répartition dans l'espace du champ électrique et du champ magnétique entourant, à un instant donné, les charges électriques en mouvement. La méthode des *Potentiels retardés* a permis de résoudre ce problème dans le cas des courants permanents et dans celui des charges petites animées d'un mouvement rectiligne uniforme. Dans le cas général, on obtiendra seulement des expressions locales, le calcul devant être effectué, à un instant donné, pour un point déterminé de l'espace.

Voici le principe de cette méthode :

On transforme d'abord les équations (1) en introduisant le *Potentiel Scalaire* U et le *Potentiel Vecteur* $\vec{A}$. Nous ferons le calcul dans le cas du vide, dans lequel $\varepsilon = 1$ et $\mu = 1$.

Puisque $\vec{H}$ a une divergence nulle, il dérive d'un potentiel vecteur $\vec{A}$, l'équation :

$$(5) \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A}$$

remplace l'équation (4). Introduisons le vecteur $\vec{A}$ dans l'équation (2) :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} = \text{rot } \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = - \text{rot } \vec{E}$$

$$\text{rot} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{E} \right) = 0,$$

ce qui signifie que l'expression entre parenthèses dérive d'un potentiel scalaire $-U$:

$$(6) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{E} = - \text{grad } U \quad \text{ou} \quad \vec{E} = - \text{grad } U - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Il reste à introduire $\vec{A}$ et U dans (1) à l'aide des relations (5) et (6) en tenant compte de l'identité :

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

on obtient :

$$(7) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} - 4\pi\rho \frac{\vec{v}}{c} = \text{grad} \left(\text{div } \vec{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} \right).$$

$\vec{A}$ n'est déterminé qu'à un gradient près, sa divergence est donc arbitraire, on peut choisir ce gradient de manière à annuler le deuxième membre de l'équation précédente, soit :

$$\text{div } \vec{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} = 0;$$

en dérivant cette expression par rapport à t et en tenant compte de (3) et de (6) et de l'identité :

$$\text{div grad } U = \Delta U,$$

on obtient l'équation :

$$(8) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

à laquelle il faut ajouter l'équation (7) qui devient :

$$(9) \quad \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 4\pi\rho \frac{\vec{v}}{c}$$

et les équations déjà écrites :

$$(6) \quad \vec{E} = - \text{grad } U - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A} \quad (5)$$

Les équations (8, et (9) remplacent les équations de Maxwell; elles déterminent le potentiel scalaire U et le potentiel vecteur $\vec{A}$ à partir desquels on calcule les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$, à l'aide des relations (5) et (6).

L'intérêt de cette transformation réside dans le fait que le potentiel scalaire et les trois composantes du potentiel vecteur vérifient une seule et même équation qui est l'équation des ondes.

Un cas particulièrement simple est celui du *régime permanent*, les potentiels sont alors indépendants du temps, les équations (8) et (9) se réduisent à :

$$(10) \quad \Delta U = 4\pi\rho \qquad (11) \quad \Delta \vec{A} = 4\pi\rho \frac{\vec{V}}{c}$$

La première est l'équation de Poisson bien connue en électrostatique, elle admet pour solution :

$$U = \int \rho \frac{d\tau}{r}$$

r étant la distance d'un point M intérieur à l'élément $d\tau$, au point P où l'on calcule les potentiels. C'est le potentiel électrostatique.

La deuxième est une équation vectorielle, elle se décompose en trois équations scalaires qui ont la même forme que les précédentes ; la solution est évidemment :

$$A_x = \int \frac{\rho V_x}{r} d\tau \qquad A_y = \int \frac{\rho V_y}{r} d\tau \qquad A_z = \int \frac{\rho V_z}{r} d\tau$$

vectoriellement :

$$\vec{A} = \int \frac{\rho \vec{V}}{r} d\tau$$

Ces intégrales sont étendues au domaine occupé par l'électricité.

Dans le cas où le régime n'est pas permanent, la forme des équations laisse à prévoir que les potentiels sont susceptibles de *se propager par ondes* avec la vitesse c qui est celle de la lumière. La solution conserve la même forme mais il faut remplacer dans les intégrales des potentiels, la densité $\rho(x, y, z, t)$ et la vitesse $\vec{V}(x, y, z, t)$ par la *densité retardée*

$\rho\left[x, y, z, t - \frac{r}{c}\right]$ et la *vitesse retardée* $\vec{V}\left[x, y, z, t - \frac{r}{c}\right]$

qui existaient au point M à l'instant $t - \frac{r}{c}$ qui est précisément le temps mis par une onde de vitesse c pour aller de M en P.

Ces intégrales sont étendues à toute la région de l'espace lieu des points M où il existait de l'électricité aux instants :

$$\theta = t - \frac{r}{c}.$$

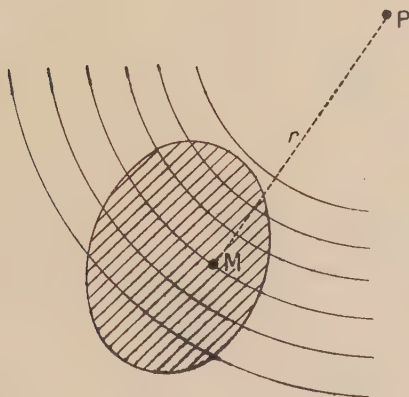


Fig. 1.

En d'autres termes, le potentiel au point P à l'instant t n'est pas déterminé par la densité électrique existant à cet instant, mais par une densité fictive obtenue en décomposant l'espace en sphères concentriques infiniment voisines de centre P (fig. 1), la densité et la vitesse de l'électricité dans l'espace compris entre les sphères de rayon r et $r + dr$ étant la densité et la vitesse que possédaient le fluide électrique dans cette région de l'espace, à l'instant $\theta = t - \frac{r}{c}$. Autrement dit, si on considère une sphère de centre P, de rayon variable $r = c(t - t_0)$ qui se contracte comme une onde pour conver-

ger au point P à l'instant t_0 , les potentiels à l'instant t_0 dépendent des états (densité et vitesse) des charges électriques rencontrées par la sphère au cours du temps. On peut dire que le potentiel scalaire et le potentiel vecteur *se propagent par onde* avec la vitesse de la lumière.

Le courant électrique fictif composé de la densité retardée animée de la vitesse retardée *correspond à un point P bien déterminé de l'espace*. On obtiendra donc les potentiels et par suite les champs au point P seulement. Ce n'est que lorsque le régime est permanent que l'on obtiendra l'ensemble du champ.

§ 2. **Théorie des électrons de Lorentz.** — A l'échelle atomique, on ne peut plus assimiler l'électricité à un fluide continu, il n'y a plus que des électrons séparés par du vide. La notion de densité électrique n'a plus de sens. Lorentz attribua une structure à l'électron : un volume D et une densité électrique ρ , il reprit ainsi à l'échelle atomique la notion d'électricité, milieu continu. ρ et D sont indéterminés, seule, la charge totale :

$$e = \int \int \int_D \rho d\tau$$

est accessible à l'expérience. Le champ d'un courant étant formé par la somme des champs des électrons qui le composent, le problème fondamental sera de déterminer le champ électrique et le champ magnétique de l'électron en mouvement. Les équations de l'électromagnétique restent applicables intégralement ainsi que la méthode des potentiels retardés.

On détermine d'abord le potentiel scalaire U et le potentiel vecteur $\vec{A}$ en un point P de l'espace ; on a encore :

$$U = \int \int \int \frac{\rho \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} d\tau \quad \vec{A} = \int \int \int \frac{\rho \left(t - \frac{r}{c} \right) \vec{v} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} d\tau$$

ces intégrales sont étendues à l'électron retardé qui est le lieu des points M de l'espace où il existait de l'électricité aux instants $t - \frac{r}{c}$, r étant toujours la distance MP (fig. 2).

On peut encore écrire :

$$U = \frac{1}{r} \iiint \rho \left(t - \frac{r}{c} \right) d\tau \quad \vec{A} = \frac{\vec{V}}{r} \left(t - \frac{r}{c} \right) \iiint \rho \left(t - \frac{r}{c} \right) d\tau$$

 r désignant la distance du point P à un point moyen de l'électron retardé. $\vec{V} \left(t - \frac{r}{c} \right)$ désignant la vitesse retardée de ce point.

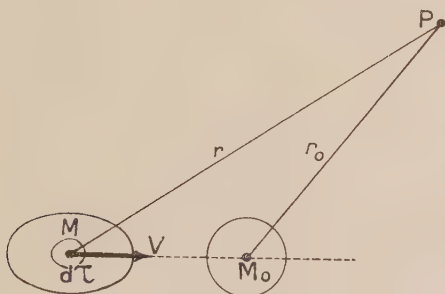


Fig. 2.

Nous ferons remarquer qu'il faut se garder de confondre ces intégrales étendues au domaine retardé avec la charge de l'électron :

$$e = \iiint_D \rho(t) d\tau$$

étendue au domaine actuel.

En l'absence de toute donnée expérimentale sur cette hypothèse audacieuse, on étudie le champ à une distance assez grande de l'électron pour qu'on puisse en négliger les dimensions devant cette distance. On démontre ⁽¹⁾ que l'on a dans ce cas :

⁽¹⁾ LANGEVIN, *Journal de Physique* [4], 4, (mars 1905); E. WIECHERT, *Lorentz Festschrift. Arch. Néerl.*, [2], 5 (1900), 549; LIENARD, *Ech. électrique*, 16 (1898), 5, 53, 106.

$$(2) \quad \int \int \int \left(t - \frac{r}{c} \right) d\tau = \frac{e}{1 - \frac{V_r}{c}}$$

V_r étant la vitesse radiale de l'électron dans sa position retardée. On a alors :

$$(3) \quad U = \frac{1}{r} \frac{e}{1 - \frac{V_r}{c}} \quad \vec{A} = \frac{\vec{V}}{r} \frac{e}{1 - \frac{V_r}{c}} \quad (4)$$

En résumé, soit M_0 la position de l'électron à l'instant t_0 (fig. 3), M une position antérieure correspondant au temps

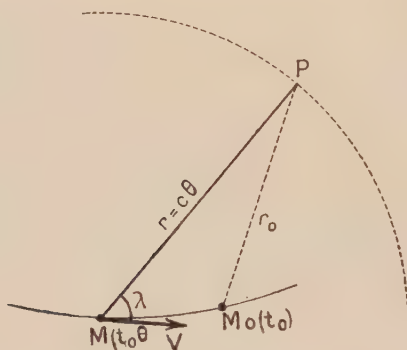


Fig. 3.

$t = t_0 - \theta$, P un point situé à la distance $r = c\theta$ de M , dans une direction faisant avec la vitesse un angle λ . Les potentiels au point M à l'instant t sont donnés par les expressions (3) et (4).

Les champs s'obtiennent au moyen des formules (5) et (6), § 1; leur calcul est très délicat parce que les quantités r et λ qui figurent dans les expressions ci-dessus dépendent des coordonnées du point P soit directement, soit par l'intermédiaire des coordonnées retardées, et que ces dernières dépendent du temps par l'intermédiaire des coordonnées « actuelles » de l'électron et de celles du point P . On obtient des résultats simples dans les deux cas suivants :

1° *La vitesse retardée est nulle.* — Soit M la position retardée, $\vec{\Gamma}$ l'accélération retardée correspondant au point P de l'espace, φ l'angle que fait $\vec{\Gamma}$ avec $\vec{MP}$. Construisons le trièdre

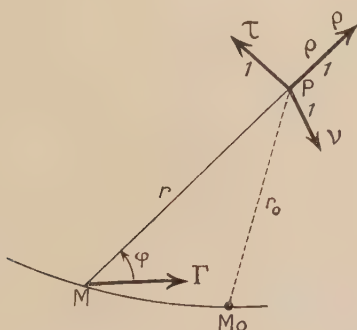


Fig. 4.

unitaire $\vec{\rho}, \vec{\tau}, \vec{\nu}$ (fig. 4), $\vec{\rho}$ étant dirigé suivant $\vec{MP}$, $\vec{\tau}$ étant perpendiculaire à $\vec{MP}$, dans le plan contenant $\vec{MP}$ et $\vec{\nu}$, le

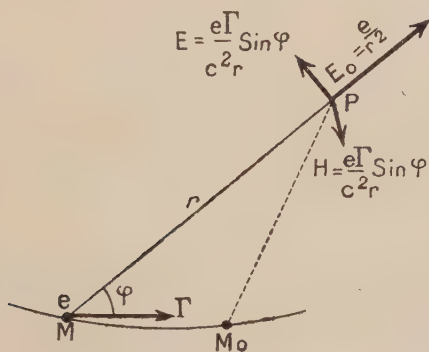


Fig. 5.

sens qui amène $\vec{\rho}$ sur $\vec{\tau}$ étant celui qui amène $\vec{\nu}$ sur $\vec{MP}$, $\vec{\nu}$ étant orienté de telle façon que le trièdre soit direct.

Le champ électrique est composé (fig. 5) :

a) Du champ électrostatique :

$$\vec{E}_0 = \rho \frac{e}{r^2}.$$

b) Du champ dû à l'accélération :

$$(4) \quad \vec{E} = \tau \frac{e\Gamma}{c^2 r} \sin \varphi.$$

Le champ magnétique a pour expression :

$$(5) \quad \vec{H}_a = v \frac{e\Gamma}{c^2 r} \sin \varphi.$$

Les expressions (4) et (5) constituent ce qu'on appelle « l'onde d'accélération » qui fournit une interprétation intéressante du rayonnement électromagnétique, dans le cadre des équations de Maxwell ⁽¹⁾.

Il ne faudrait pas croire qu'en faisant varier r et φ on obtiendrait le champ à un instant donné en toutes les régions de l'espace puisqu'à chaque position de P correspond à cet instant une position retardée M particulière.

Cette méthode ne donne donc pas une vue d'ensemble des champs entourant la charge électrique, à un instant donné, mais plutôt les valeurs que prennent ceux-ci, aux différents points de l'espace, aux instants où ces points sont atteints par « l'onde de potentiel », au cours de sa propagation.

2° *Le mouvement rectiligne uniforme.* — Dans ce cas, il est possible d'exprimer les champs en fonction des coordonnées actuelles de l'électron soit M la position de l'électron à l'instant t (fig. 6), $\vec{V}$ sa vitesse, P un point quelconque de l'espace, θ l'angle que $\vec{MP}$ fait avec $\vec{V}$. Le champ électrique est dirigé suivant $\vec{MP}$, il a pour expression, en posant $\vec{MP} = \vec{r}$:

$$(6) \quad \vec{E} = e \frac{r}{r^3} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

(1) Voir LANGEVIN, *Journal de Physique* [4^e], mars 1905.

Le champ magnétique a pour expression :

$$(7) \quad \vec{H} = \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}.$$

Ces formules sont dues à Sir J. J. Thomson (*Recent Researches*, 1892).

Dans ce cas particulier, les expressions (6) et (7) représentent deux champs vectoriels, en ce sens que l'on a tous les vecteurs du champ en faisant varier r et θ .

3° *Un autre point de vue.* — La théorie de la relativité a permis d'envisager le problème sous un jour nouveau ; il n'est plus nécessaire d'attribuer une structure à l'électron

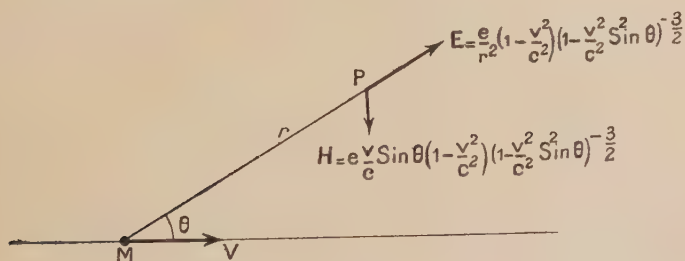


Fig. 6.

pour calculer le champ magnétique de l'électron *en mouvement uniforme*. En effet, dans un système de référence lié à l'électron, le champ se réduit au champ électrostatique que l'on suppose être égal au champ de Coulomb :

$$\vec{E}_0 = e \frac{\vec{r}}{r^3}$$

avec les mêmes notations qu'au paragraphe précédent.

Il suffit d'effectuer sur cette expression la transformation de Lorentz pour avoir le champ électrique et le champ magnétique dans le système fixe ; on retrouve les formules de Thomson. Il n'est plus question de potentiels se propageant par ondes mais seulement des propriétés de la transformation de Lorentz qui laisse invariantes les équations de Maxwell dans le vide.

CHAPITRE II

Considérations analytiques. Suites de tourbillons.

SOMMAIRE. — Les notions que nous nous proposons d'aborder sommairement seront utilisées au chapitre suivant. Nous rappellerons d'abord quelques théorèmes d'analyse vectorielle puis nous étudierons deux sortes de champs que l'on rencontre en électromagnétisme. 1^o Les champs dont les vecteurs représentatifs sont contenus dans les plans méridiens passant par un axe Ox et présentant la symétrie de révolution autour de cet axe (champ électrique). 2^o Les champs perpendiculaires à ces plans méridiens et présentant également la symétrie de révolution autour de Ox (champ magnétique). Nous établirons des formules permettant d'en calculer commodément la divergence et le rotationnel.

Nous nous occuperons après quoi, des suites de champs vectoriels dont chaque terme est le tourbillon du terme suivant et nous prendrons comme exemple une suite ayant pour premier terme un champ de doublet. Cette suite dont les termes successifs appartiennent alternativement aux deux types que nous venons de mentionner joue un rôle fondamental dans notre méthode d'intégration des équations de Maxwell, que nous abordons au chapitre suivant.

NOTATIONS. — Nous désignerons les quantités vectorielles par une lettre majuscule surmontée d'une flèche. Nous désignerons le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ par la notation :

$$\vec{A} \times \vec{B}$$

et le produit scalaire par la notation :

$$\vec{A} \cdot \vec{B}$$

§ 1. Rappel de quelques notions d'analyse vectorielle. **Gradient, Divergence, Rotationnel.** — Considérons un trièdre trirectangle $Oxyz$ et une fonction $U(x, y, z)$ définie et continue dans un certain domaine de l'espace. On appelle *gradient* de cette fonction le vecteur $\vec{G} = \overrightarrow{\text{grad } U}$ de composantes :

$$G_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad G_y = \frac{\partial U}{\partial y} \quad G_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

On dit que le vecteur $\vec{G}$ *dérive d'un potentiel scalaire* U . On appelle Laplacien de cette fonction la quantité :

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Considérons maintenant un champ de vecteurs $\vec{A}$ dont les composantes A_x, A_y, A_z sont des fonctions continues de x, y, z et admettent des dérivées continues dans une certaine région de l'espace. On appelle *divergence* de ce vecteur la quantité scalaire :

$$\text{Div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

On appelle *rotationnel* ou *tourbillon* d'un champ de vecteurs $\vec{A}$ le vecteur $\vec{R} = \text{rot } \vec{A}$ de composantes :

$$R_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$R_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$R_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

on dit que $\vec{R}$ *dérive d'un potentiel vecteur* $\vec{A}$.

Le Laplacien d'un vecteur $\vec{A}$ est un vecteur $\vec{B} = \Delta \vec{A}$ dont les composantes sont les laplaciennes des composantes de $\vec{A}$; On a :

$$\begin{aligned} B_x = \Delta A_x &= \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ B_y = \Delta A_y &= \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ B_z = \Delta A_z &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Rappelons l'identité remarquable :

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

• •

On démontre que :

1° *Le tourbillon d'un champ de gradient est nul*, un champ sans tourbillon est un champ de gradient, il dérive d'un potentiel scalaire.

2° *La divergence d'un champ de tourbillon est nulle*, un champ sans divergence est un champ de tourbillon, il dérive d'un potentiel vecteur.

Par suite, un champ sans divergence ni tourbillon dérive à la fois d'un potentiel scalaire et d'un potentiel vecteur. Le champ de gravitation et le champ électrostatique jouissent de ces propriétés.

• •

Un champ admet un facteur intégrant lorsqu'on peut trouver une fonction de x, y, z telle qu'en multipliant le champ par cette quantité, on obtienne un champ dérivant d'un potentiel. Les lignes de force d'un champ à facteur intégrant représentent les trajectoires orthogonales d'une famille de surface.

Ces champs jouissent d'une propriété importante : *ils sont orthogonaux à leur tourbillon.*

§ 2. Emploi des coordonnées polaires, changement de variables. — Lorsqu'un champ vectoriel présente une symétrie de révolution autour d'un axe Ox , il y a avantage à utiliser les coordonnées polaires. Les opérateurs définis au paragraphe précédent étant exprimés en coordonnées cartésiennes, on commencera d'abord par changer de variables.

Soit $Oxyz$ un trièdre trirectangle (fig. 7), P un point de

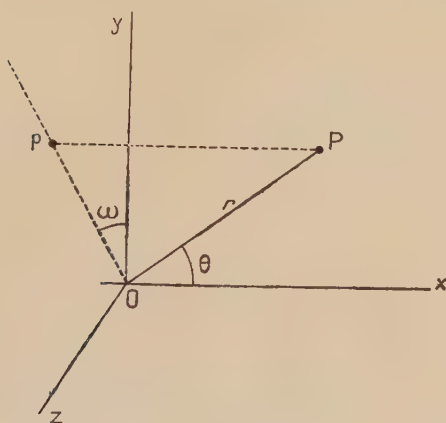


Fig. 7.

l'espace de coordonnées x, y, z . Posons $OP = r$. Soit θ l'angle que font les directions OP et Ox . Soit ω l'angle que fait le plan xOP avec le plan xOy . On a :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \cos \omega \\ z &= r \sin \theta \sin \omega. \end{aligned}$$

En différenciant :

$$\begin{aligned} dx &= \cos \theta \, dr - \sin \theta \, d\theta \\ dy &= \sin \theta \cos \omega \, dr - r \cos \theta \cos \omega \, d\theta - r \sin \theta \sin \omega \, d\omega \\ dz &= \sin \theta \sin \omega \, dr + r \cos \theta \sin \omega \, d\theta + r \sin \theta \cos \omega \, d\omega \end{aligned}$$

en résolvant par rapport à dr , $d\theta$, $d\omega$:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} dr = \cos \theta \, dx + \sin \theta \cos \omega \, dy + \sin \theta \sin \omega \, dz \\ d\theta = -\frac{\sin \theta}{r} \, dx + \frac{\cos \theta \cos \omega}{r} \, dy + \frac{\cos \theta \sin \omega}{r} \, dz \\ d\omega = -\frac{\sin \omega}{r \sin \theta} \, dy + \frac{\cos \omega}{r \sin \theta} \, dz. \end{array} \right.$$

On a ainsi les dérivées partielles des quantités r , θ et ω par rapport à x , y , z . Sachant d'autre part que l'on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

et d'autres relations analogues pour les dérivées par rapport à y et z , on peut écrire les *formules de changement de variables* :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \cos \omega \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta \cos \omega}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \omega}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \omega} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \sin \theta \sin \omega \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta \sin \omega}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \omega}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \omega} \end{array} \right.$$

§ 3. Etude des champs perpendiculaires à des plans passant par un axe OX et présentant la symétrie de révolution autour de cet axe.

DIVERGENCE. — Les lignes de force sont des cercles de révolution autour de O $\hat{x}$ (fig. 8). Les tubes de force sont des anneaux de révolution à section constante. Le flux se conservera le long d'un tube de force puisque le champ est de révolution autour de OX, la *divergence d'un tel champ est donc nulle*.

ROTATIONNEL. — Reprenons les notations du paragraphe précédent, soient Oxyz, un trièdre trirectangle, $\vec{B}$ le champ au point P de coordonnées cartésiennes x , y , z de coordonnées polaires r , θ et ω .

Le champ étant de révolution autour de Ox ne dépend pas de ω , il est perpendiculaire au plan POx et a pour expression :

$$B = \varphi(r, \theta)$$

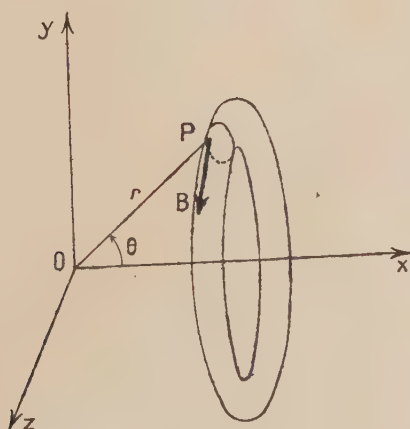


Fig. 8.

le sens positif de rotation autour de Ox étant celui qui amène Oy sur Oz . Ce champ a pour composantes suivant les trois axes Ox , Oy , Oz :

$$B_x = 0$$

$$B_y = -\varphi(r, \theta) \sin \omega$$

$$B_z = \varphi(r, \theta) \cos \omega.$$

En dérivant ces quantités par rapport à x , y , z , à l'aide des formules (2), § 2, on a :

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = -\left(\cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) \sin \omega$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) \sin^2 \omega - \frac{\varphi}{r} \frac{\cos^2 \omega}{\sin \theta}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = \left(\cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) \cos \omega$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} = \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) \cos^2 \omega + \frac{\varphi}{r} \frac{\sin^2 \omega}{\sin \theta}.$$

Le vecteur $\text{rot } \vec{B}$ a pour composantes :

$$(3) \quad \begin{cases} \xi = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\varphi(r, \theta)}{r \sin \theta} \\ \eta = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = - \left(\cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \cos \omega \\ \zeta = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = - \left(\cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \sin \omega. \end{cases}$$

On voit que le vecteur $\text{rot } \vec{B}$ en un point P est situé dans le plan méridien xOP ce qui était évident *a priori* car le champ $\vec{B}$ admet un *facteur intégrant* puisque ses lignes de force représentent les trajectoires orthogonales d'une famille de surface (les plans méridiens passant par Ox). On sait que dans ce cas, le champ est orthogonal à son rotationnel.

Si nous projetons ce champ suivant OP et suivant une direction rectangulaire $P\tau$ orientée dans le sens correspondant à celui de θ et si nous appelons $\vec{E}$ et $\vec{F}$ les composantes du tourbillon suivant ces deux directions on a les formules fondamentales :

$$(4) \quad \begin{cases} E = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\varphi}{r} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ F = - \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\varphi}{r}. \end{cases}$$

§ 4. Etude des champs contenus dans des plans passant par OX et présentant la symétrie de révolution autour de cet axe.

— Soit $\vec{A}$ un vecteur du champ, on le décomposera en un vecteur radial $\vec{E}$ et un vecteur tangentiel $\vec{F}$ (fig. 9), on a :

$$\vec{A} = \vec{E} + \vec{F}.$$

Projetons sur les trois axes $Ox Oy Oz$, on a en désignant par $\vec{E}$ et $\vec{F}$ les valeurs absolues des vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{F}$:

$$(5) \quad \begin{cases} A_x = \cos \theta E - \sin \theta F \\ A_y = (\sin \theta E + \cos \theta F) \cos \omega \\ A_z = (\sin \theta E + \cos \theta F) \sin \omega. \end{cases}$$

DIVERGENCE. — On calculera les dérivées $\frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{\partial A_y}{\partial y} \frac{\partial A_z}{\partial z}$.

On se servira des formules (2) du paragraphe 2. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_x}{\partial x} = & \cos \theta \left(\cos \theta \frac{\partial E}{\partial r} - \sin \theta \frac{\partial F}{\partial r} \right) \\ & - \frac{\sin \theta}{r} \left(\cos \theta \frac{\partial E}{\partial \theta} - \sin \theta E - \sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} - \cos \theta F \right) \end{aligned}$$

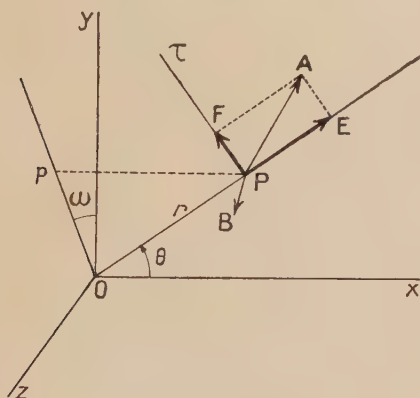


Fig. 9.

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_y}{\partial y} = & \sin \theta \cos^2 \omega \left(\sin \theta \frac{\partial E}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial F}{\partial r} \right) \\ & + \frac{\cos \theta \cos \omega}{r} \left(\sin \theta \frac{\partial E}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} + \cos \theta E + \sin \theta F \right) \\ & + \frac{\sin^2 \omega}{r \sin \theta} (\sin \theta E + \cos \theta F) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_z}{\partial z} = & \sin \theta \sin \omega \left(\sin \theta \frac{\partial E}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial F}{\partial r} \right) \\ & + \frac{\cos \theta \sin^2 \omega}{r} \left(\sin \theta \frac{\partial E}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} + \cos \theta E + \sin \theta F \right) \\ & + \frac{\cos^2 \omega}{r \sin \theta} (\sin \theta E + \cos \theta F). \end{aligned}$$

En ajoutant, on obtient :

$$\text{Div } \vec{A} = \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{2E}{r} + \frac{E \cos \theta}{r \sin \theta}.$$

ROTATIONNEL. — On calculera de même :

$$\frac{\partial A_z}{\partial y}, \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z}, \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x}, \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

puis on formera les trois composantes ξ, η, ζ du rotationnel.

On a d'abord :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_z}{\partial y} &= \sin \theta \cos \omega \frac{\partial A_z}{\partial} + \frac{\cos \theta \cos \omega}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\sin \omega}{r \sin \theta} \frac{\partial A_z}{\partial \omega} \\ \frac{\partial A_y}{\partial z} &= \sin \theta \sin \omega \frac{\partial A_y}{\partial r} + \frac{\cos \theta \sin \omega}{r} \frac{\partial A_y}{\partial \theta} + \frac{\cos \omega}{r \sin \theta} \frac{\partial A_y}{\partial \omega} \end{aligned}$$

en retranchant membre à membre :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial z} (A_z \cos \omega - A_y \sin \omega) \\ &\quad + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_z \cos \omega - A_y \sin \omega) \\ &\quad - \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial A_z}{\partial \omega} \sin \omega + \frac{\partial A_y}{\partial \omega} \cos \omega \right). \end{aligned}$$

En se reportant aux formules (5) on voit que les quantités entre parenthèses sont nulles, on a donc :

$$\xi = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0$$

On a de même :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_x}{\partial z} &= \sin \omega \left[\sin \theta \left(\cos \theta \frac{\partial E}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial F}{\partial r} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos \theta}{r} \left(\cos \theta \frac{\partial E}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} - E \sin \theta + F \cos \theta \right) \right] \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} &= \sin \omega \left[\cos \theta \left(\sin \theta \frac{\partial E}{\partial r} - \cos \theta \frac{\partial F}{\partial r} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin \theta}{r} \left(\sin \theta \frac{\partial E}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} + E \cos \theta + F \sin \theta \right) \right] \\ \eta &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\sin \omega \left[\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{F}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial \theta} \right]. \end{aligned}$$

On trouve par un calcul semblable :

$$\zeta = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \cos \omega \left[\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{F}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial \theta} \right].$$

On voit que le champ $\vec{A}$ de composantes ξ, η, ζ est per-

pendiculaire au plan méridien passant par Ox et contenant le point P ; il présente de plus la symétrie de révolution autour de cet axe.

RÉSUMÉ DES §§ 3 ET 4. — Nous allons résumer ces résultats en les mettant sous une forme vectorielle commode.

Nous reprenons la figure 9 que nous complétons en construisant le trièdre trirectangle unitaire $P \begin{smallmatrix} \vec{\rho} \\ \vec{\tau} \\ \vec{\nu} \end{smallmatrix}$ (fig. 10). $\vec{\rho}$ étant dirigé suivant $\vec{OP}$, $\vec{\tau}$ étant dans le plan POx , le sens qui

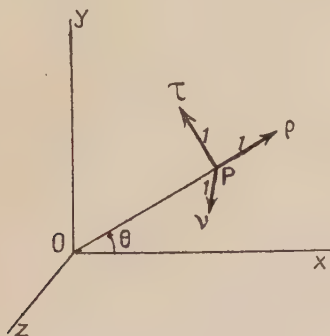


Fig. 10.

amène $\vec{\rho}$ sur $\vec{\tau}$ étant celui qui amène Ox sur OP . $\vec{\nu}$ étant dirigé de telle façon que le trièdre soit direct.

Avec ces notations :

1° Tout champ de la forme :

$$\vec{B} = \vec{\nu} \varphi(r, \theta) \quad (\text{fig. 11})$$

a une *divergence nulle* et admet pour rotationnel le vecteur :

$$\vec{A} = \frac{\rho}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \varphi \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \vec{\tau} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\varphi}{r} \right) \vec{\rho} \quad (6)$$

qui est de la forme :

$$\vec{A} = \rho \vec{E}(r, \theta) + \tau \vec{F}(r, \theta)$$

avec :

$$E = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\varphi}{r} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad F = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\varphi}{r}.$$

2° Tout champ de la forme :

$$\vec{A} = \rho \vec{E}(r, \theta) + \tau \vec{F}(r, \theta)$$

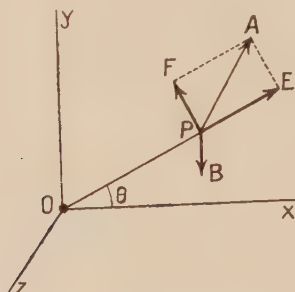


Fig. 11.

a pour divergence la quantité :

$$\text{Div } \vec{A} = \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{2E}{r} + \frac{F}{r} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (7)$$

et pour rotationnel le vecteur :

$$\vec{B} = \gamma \vec{\varphi}(r, \theta),$$

avec :

$$(8) \quad \varphi = \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{F}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial \theta}.$$

§ 5. Suites de tourbillons. Séries de tourbillons (Définitions.

Propriétés). — Soit un champ vectoriel $\vec{A}_n$ dont les composantes admettent des dérivées successives continues par rapport à x, y, z dans un certain domaine de l'espace, et dont la divergence soit nulle. Considérons la suite de champs vectoriels définis à partir de $\vec{A}_n$ par des relations de récurrence :

$$\begin{array}{ll} \vec{A}_{n-1} = \text{rot } \vec{A}_n, & \vec{A}_{n-2} = \text{rot } \vec{A}_{n-1} \dots \\ \cdot & \cdot \\ \vec{A}_2 = \text{rot } \vec{A}_3, & \vec{A}_1 = \text{rot } \vec{A}_2 \dots \end{array}$$

Tous ces champs ont une divergence nulle. On pourra continuer jusqu'à ce qu'on arrive à un vecteur $\vec{A}_0$ qui dérive d'un potentiel et qui termine la série puisque son tourbillon est nul.

Inversement, si on se donne un champ $\vec{A}_0$ sans divergence ni tourbillon, on pourra en déduire une suite infinie de vecteurs :

$$\vec{A}_0 \quad \vec{A}_1 \quad \vec{A}_2 \quad \dots \quad \vec{A}_n \quad \dots$$

chaque terme se déduisant du précédent par la relation de récurrence :

$$(9) \quad \vec{A}_n = \text{rot } \vec{A}_{n+1},$$

et la condition complémentaire :

$$(10) \quad \text{div } \vec{A}_{n+1} = 0,$$

qui n'est autre que la condition d'intégrabilité de la relation suivante, soit :

$$(11) \quad \vec{A}_{n+1} = \text{rot } \vec{A}_{n+2}.$$

On aura de même entre les termes d'ordre pair et entre les termes d'ordre impair des relations de la forme :

$$\vec{A}_{n-1} = \text{rot rot } \vec{A}_{n+1} = \text{grad div } \vec{A}_{n+1} - \Delta \vec{A}_{n+1}$$

ou :

$$\vec{A}_{n-1} = -\Delta \vec{A}_{n+1}.$$

Groupons ensemble, d'une part les relations d'ordre pair,

d'autre part les relations d'ordre impair, en y joignant les conditions d'intégrabilité correspondantes. On a pour le groupe I :

Série (a) :

$$\begin{array}{ll}
 \vec{A}_0 = \text{rot } \vec{A}_1 & \text{div } \vec{A}_0 = 0 \\
 \vec{A}_2 = \text{rot } \vec{A}_3 & \text{div } \vec{A}_2 = 0 \\
 \vec{A}_4 = \text{rot } \vec{A}_5 & \text{div } \vec{A}_4 = 0 \\
 \dots & \dots \\
 \vec{A}_{2n} = \text{rot } \vec{A}_{2n+1} & \text{div } \vec{A}_{2n} = 0 \\
 \dots & \dots
 \end{array}$$

Série (b) :

$$\begin{array}{ll}
 \vec{A}_1 = \text{rot } \vec{A}_2 & \text{div } \vec{A}_1 = 0 \\
 \vec{A}_3 = \text{rot } \vec{A}_4 & \text{div } \vec{A}_3 = 0 \\
 \dots & \dots \\
 \vec{A}_{2n-1} = \text{rot } \vec{A}_{2n} & \text{div } \vec{A}_{2n-1} = 0 \\
 \dots & \dots
 \end{array}$$

Supposons maintenant que la suite des termes d'ordre pair et la suite des termes d'ordre impair forment deux séries convergentes et posons :

$$\begin{array}{l}
 \vec{\alpha} = \vec{A}_0 + \vec{A}_2 + \vec{A}_4 + \dots + \vec{A}_{2n} + \dots \\
 \vec{\beta} = \vec{A}_1 + \vec{A}_3 + \vec{A}_5 + \dots + \vec{A}_{2n+1} + \dots
 \end{array}$$

Ajoutons membre les relations de la série (a) ainsi que les équations complémentaires, opérons de même pour la série (b), en tenant compte des relations précédentes ainsi que des propriétés associatives de la dérivation du rotation-

nel (qui proviennent de leur forme linéaire), on voit que les vecteurs $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ vérifient les équations aux dérivées partielles :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \vec{\alpha} = \text{rot } \vec{\alpha} & \text{div } \vec{\alpha} = 0 \\ \vec{\beta} = \text{rot } \vec{\beta} & \text{div } \vec{\beta} = 0 \end{array} \right. \quad (13)$$

En appliquant le même raisonnement aux relations (2) on obtient les formules :

$$(14) \quad \overset{\rightarrow}{\alpha} = -\Delta \overset{\rightarrow}{\alpha} \quad \overset{\rightarrow}{\beta} = -\Delta \overset{\rightarrow}{\beta} \quad (15)$$

Ou peut généraliser les relations (9) (10) (11) en faisant intervenir un paramètre t , pourvu que les dérivations par rapport à ce paramètre figurent linéairement, et obtenir des solutions d'équations plus générales telles que les équations de Maxwell et celle des ondes électromagnétiques. Ce sera l'objet du chapitre suivant.

EXEMPLE DE SUITE ET DE SÉRIES DE TOURBILLONS

On a un exemple intéressant dans la suite :

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & & \rightarrow & \rightarrow \\ A_0 & B_1 & A_2 & B_3 & \dots & A_{2n} & B_{2n+1} \dots \end{array}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \vec{A}_0 &= \frac{1}{r^3} (2 \rho \cos \theta + \tau \sin \theta), \\ \vec{A}_2 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{r} (2 \rho \cos \theta - \tau \sin \theta), \\ &\dots \dots \dots \\ (16) \quad \vec{A}_{2n} &= -\frac{2n-1}{2n!} r^{2n-3} [2 \rho \cos \theta - (2n-1) \tau \sin \theta] \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{B}_1 &= \frac{v}{r^2} \sin \theta, \\
 \vec{B}_3 &= -\frac{v}{2} \sin \theta, \\
 &\dots \dots \dots \\
 (17) \quad \vec{B}_{2n+1} &= -v \frac{2n-1}{2n!} r^{2n-2} \sin \theta. \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

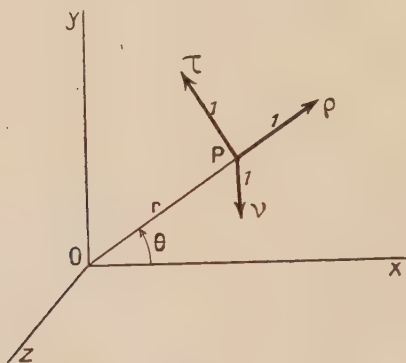


Fig. 12.

En adoptant toujours les notations des §§ 3 et 4 et le trièdre unitaire $\vec{\rho} \vec{\tau} \vec{v}$ (fig. 12). Chaque terme est bien le rotationnel du terme suivant, en effet, formons le rot de $\vec{B}_{2n+1}$. On utilisera la formule (6) et on a :

$$\text{rot } \vec{B}_{2n+1} = \vec{A}_{2n} = -\frac{2n-1}{2n!} \left[\frac{\rho}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \varphi \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) - \tau \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\varphi}{r} \right) \right]$$

avec $\varphi = r^{2n-2} \sin \theta$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \varphi \frac{\cos \theta}{\sin \theta} &= 2r^{2n-2} \cos \theta, \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\varphi}{r} &= (2n-1)r^{2n-3} \sin \theta.
 \end{aligned}$$

en substituant :

$$A_{2n} = - \frac{2n-1}{2n!} r^{2n-3} [2 \vec{\rho} \cos \theta - (2n-1) \vec{\tau} \sin \theta],$$

prenons une fois encore le rotationnel (formule 8) :

$$\vec{B}_{2n-1} = \text{rot } A_{2n} = \text{rot rot } B = - \frac{2n-1}{2n!} \vec{\nabla} \left(\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{F}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial \theta} \right)$$

avec :

$$E = 2r^{2n-3} \cos \theta \quad F = -(2n-1)r^{2n-3} \sin \theta,$$

en dérivant :

$$\frac{\partial F}{\partial r} = -(2n-1)(2n-3)r^{2n-4} \sin \theta,$$

$$\frac{F}{r} = -(2n-1)r^{2n-4} \sin \theta,$$

$$- \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial \theta} = 2r^{2n-4} \sin \theta,$$

en ajoutant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{F}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial \theta} \\ = -[(2n-1)(2n-3) + (2n-1) - 2]r^{2n-4} \sin \theta \\ = -2n(2n-3)r^{2n-4} \sin \theta. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\vec{B}_{2n-1} = + \frac{2n-3}{(2n-2)!} \vec{\nabla} r^{2n-4} \sin \theta.$$

On reconnaît l'expression générale (17), changée de signe, dans laquelle n a diminué d'une unité.

Pour $n = 0$, $2n! = 0$, on a :

$$\vec{A}_0 = \frac{1}{r^3} (2 \vec{\rho} \cos \theta + \vec{\tau} \sin \theta).$$

Ce terme dérivant d'un potentiel, la suite s'arrête là, les expressions (16) et (17) peuvent donc être considérées comme

les termes généraux d'une suite de tourbillons ayant pour terme fondamental A_0 .

Les expressions :

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} &= \vec{A}_0 + \vec{A}_2 + \vec{A}_4 + \vec{A}_6 + \dots \vec{A}_{2n} + \dots \\ \vec{\beta} &= \vec{B}_1 + \vec{B}_3 + \vec{B}_5 + \vec{B}_7 + \dots \vec{B}_{2n+1} + \dots\end{aligned}$$

forment deux séries convergentes *quels que soient* r et θ , autrement dit, les vecteurs $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ sont définis dans tout l'espace.

Commençons par la série $\vec{\beta}$ qui est plus simple ; on peut l'écrire :

$$\begin{aligned}\vec{\beta} &= \vec{v} \frac{\sin \theta}{r^2} \\ &= \vec{v} \frac{\sin \theta}{r} \left(\frac{1}{2} r + \frac{3}{4} \frac{r^3}{3!} + \frac{5}{6} \frac{r^5}{5!} + \dots \frac{2n-1}{2n} \frac{r^{2n-1}}{(2n-1)!} \dots \right).\end{aligned}$$

On démontrera la convergence de la série entre parenthèses en la comparant aux termes correspondant d'une série exponentielle qui sera en l'occasion le sinus hyperbolique :

$$\text{sh } r = 1 + \frac{r^3}{3!} + \frac{r^5}{5!} + \dots + \frac{r^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

qui est convergente pour toutes les valeurs de r . Chaque terme de la série à étudier étant plus petit que le terme correspondant de la série du sinus hyperbolique, on en déduit la convergence de la série en question, et cela, *pour toutes les valeurs de* r :

La série (a) a pour expression :

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} &= \frac{1}{r^3} (2\rho \cos \theta + \tau \sin \theta) - \frac{1}{2} \frac{1}{r} (2\rho \cos \theta - \tau \sin \theta) \\ &\quad - \frac{3}{4!} r (2\rho \cos \theta - 3\tau \sin \theta) \\ &\quad \dots \frac{2n-1}{2n!} r^{2n-3} [2\rho \cos \theta - (2n-1)\tau \sin \theta] + \dots\end{aligned}$$

Groupons ensemble les termes de même direction, on a :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}} &= 2\rho \frac{\vec{\cos \theta}}{r^3} \\ -2\rho \frac{\vec{\cos \theta}}{r^2} &\left[\frac{1}{2} r + \frac{3}{4} \frac{r^3}{3!} + \frac{5}{6} \frac{r^5}{5!} + \dots \frac{2p-1}{2p} \frac{r^{2p-1}}{(2p-1)!} + \dots \right] \\ \vec{\mathcal{F}} &= \tau \frac{\vec{\sin \theta}}{r^3} \\ &+ \tau \frac{\vec{\sin \theta}}{r} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \frac{r^2}{2!} + \frac{5}{6} \frac{r^4}{4!} + \dots \frac{2p+1}{2p+2} \frac{r^{2p}}{2p!} + \dots \right)\end{aligned}$$

avec :

$$\vec{\mathcal{A}} = \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{F}}.$$

Ces développements en série sont convergents pour toutes les valeurs de r . Nous avons déjà vu qu'il en était ainsi du premier; nous comparerons le second au cosinus hyperbolique :

$$\operatorname{ch} r = 1 + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} + \dots + \frac{r^{2p}}{2p!} + \dots$$

on a bien :

$$\frac{2p+1}{2p+2} \frac{r^{2p}}{2p!} < \frac{r^{2p}}{2p!}.$$

CHAPITRE III

Une nouvelle méthode d'intégration des équations de Maxwell.

SOMMAIRE. — Nous nous proposons d'exposer une méthode permettant de former les solutions des équations de Maxwell susceptibles de représenter le champ électromagnétique de l'électron en mouvement.

On se donne d'abord le champ électrique de l'électron immobile, qui est supposé égal au champ de Coulomb, il jouit de la propriété de dériver d'un potentiel scalaire (son tourbillon est nul) et d'un potentiel vecteur (sa divergence est nulle).

Si l'électron est en mouvement, le champ électrique est modifié, il y a lieu de lui associer en outre un deuxième champ vectoriel, le champ magnétique. Le champ électrique et le champ magnétique vérifient dans tout l'espace les équations de Maxwell dans le vide ; ils doivent en outre tendre uniformément, le premier vers le champ électrostatique, le deuxième vers zéro lorsque la vitesse de l'électron et ses dérivées par rapport au temps tendent vers zéro.

Une réserve doit être faite pour ce qui se passe au voisinage immédiat de l'électron où l'expérience ne nous a encore rien appris. La méthode que nous proposons ne fait pas intervenir ce qui s'y passe, elle est valable pour toute la région où le champ électrique a une divergence nulle.

Certains physiciens ⁽¹⁾ considèrent l'électron comme une singularité dans le substratum universel. Il n'y a aucune difficulté à adopter ce point de vue, les résultats obtenus seraient alors valables dans tout l'espace sans restriction.

Une autre particularité de cette méthode est de donner la répartition des champs dans l'espace *à un instant donné*. Elle complète à ce point de vue la méthode si élégante introduite par la relativité restreinte, mais qui n'est valable que pour le mouvement uniforme.

§ 1. **Considérations générales.** — La méthode que nous proposons généralise les raisonnements que nous avons indiqués au chapitre précédent à propos des « séries de tourbillons ».

Soit un champ vectoriel $\vec{A}_0$ dérivant d'un potentiel scalaire ($\text{rot } \vec{A}_0 = 0$) et d'un potentiel vecteur ($\text{div } \vec{A}_0 = 0$) et dépendant en outre du temps. Supposons qu'il soit défini et continu dans un certain domaine de l'espace à l'intérieur duquel il admet des dérivées par rapport au temps, également définies et continues.

Considérons la suite infinie de vecteurs :

$$\vec{A}_0 \quad \vec{A}_1 \quad \vec{A}_2 \quad \vec{A}_3 \quad \vec{A}_4 \quad \vec{A}_5 \quad \dots \quad \vec{A}_{2n} \quad \vec{A}_{2n+1} \quad \vec{A}_{2n+2} \quad \dots$$

admettant comme terme fondamental le vecteur $\vec{A}_0$ précédemment défini et dont les termes successifs sont définis par les relations de récurrence alternées :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_{2n}}{\partial t} = - \text{rot } \vec{A}_{2n+1} \quad (1)$$

(1) « Les particules matérielles élémentaires sont en quelque sorte des positions nodales de l'éther mais pourtant leur séparation d'avec le vide qui les entoure n'est pas aussi nette qu'elle peut sembler au premier abord, car ces corpuscules se prolongent à l'extérieur dans le champ électrique qui leur est invariablement lié » (Mie).

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_{2n+2}}{\partial t} = \text{rot } \vec{A}_{2n+2} \quad (2)$$

et par les conditions d'intégrabilité :

$$(3) \quad \text{div } \vec{A}_{2n} = 0 \quad \text{div } \vec{A}_{2n+1} = 0 \quad \dots \text{ etc } \dots$$

qui donnent un sens aux relations précédentes, c étant un coefficient ayant les dimensions d'une vitesse.

Supposons que la somme des termes d'indice pair et que la somme des termes d'indice impair forment deux séries convergentes et posons :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{A}_0 + \vec{A}_2 + \vec{A}_4 + \vec{A}_6 + \dots + \vec{A}_{2n} + \dots \\ \vec{H} &= \vec{A}_1 + \vec{A}_3 + \vec{A}_5 + \vec{A}_7 + \dots + \vec{A}_{2n+1} + \dots \end{aligned}$$

En ajoutant toutes les relations telles que (1), soient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_0}{\partial t} &= \text{rot } \vec{A}_1 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_2}{\partial t} &= \text{rot } \vec{A}_3 \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_{2n}}{\partial t} &= \text{rot } \vec{A}_{2n+1} \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

et en tenant compte des propriétés associatives de la dérivation, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A}_0 + \vec{A}_2 + \vec{A}_4 \dots + \vec{A}_{2n} \dots) \\ = \text{rot} (\vec{A}_1 + \vec{A}_3 + \vec{A}_5 \dots + \vec{A}_{2n+1} + \dots) \end{aligned}$$

ou :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot } \vec{H} \quad (4)$$

En ajoutant toutes les relations telles que (2) et en tenant compte de ce que $\text{rot } \vec{A}_0 = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= -\text{rot } \vec{A}_0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} &= -\text{rot } \vec{A}_2 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_3}{\partial t} &= -\text{rot } \vec{A}_4 \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_{2n-1}}{\partial t} &= -\text{rot } \vec{A}_{2n} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

On a de même :

$$(5) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\text{rot } \vec{E}.$$

On a de plus, en vertu des conditions (3) :

$$(6) \quad \text{div } \vec{E} = 0 \qquad \text{div } \vec{H} = 0 \qquad (7)$$

Les équations (4) et (5) ne sont autres que les *équations de Maxwell* ; les équations (6) et (7) sont les conditions d'intégrabilité, appelées plus souvent équations complémentaires. Les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ que nous venons de former sont donc des *solutions des équations de Maxwell*.

§ 2. Application à l'électron. — Considérons un électron de charge e , immobile dans un système de référence galilée représenté par un trièdre trirectangle $Oxyz$. Nous ne ferons pas intervenir les dimensions possibles de l'électron que nous assimilerons à une charge ponctiforme. Soit ω sa position, ξ , η , ζ ses coordonnées. On admet, en étendant aux charges élémentaires les résultats observés sur des charges

plus importantes ⁽¹⁾, que son champ électrique en un point quelconque M, à la distance r du point ω , a pour expression le champ de Coulomb :

$$\vec{E}_0 = e \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (8)$$

Le champ électrique se trouve défini dans tout l'espace sauf au point ω où sa valeur serait infinie, c'est le point de vue de certains physiciens ⁽²⁾ qui considèrent l'électron comme une singularité dans le substratum universel. Cette manière de voir a l'inconvénient d'attribuer à l'électron une énergie infinie. Il est probable que la divergence du champ cesse d'être nulle au voisinage du centre de l'électron et que le champ y a une valeur finie. Dans l'absence de toute donnée expérimentale, nous nous abstiendrons de prendre partie et nous admettrons que la formule (8) pourrait cesser d'être valable à l'intérieur d'une petite région entourant l'électron dont les dimensions seraient de l'ordre de 10^{-13} cm.

Ce champ dérive d'un potentiel scalaire (son tourbillon est nul), il vérifie les équations :

$$\operatorname{div} \vec{E}_0 = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{E}_0 = 0.$$

Ces deux équations entraînent l'équation de Laplace :

$$\Delta \vec{E}_0 = \frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial z^2} = 0.$$

Supposons maintenant que l'électron soit en mouvement : nous admettrons, suivant le point de vue classique, que son champ électrique est modifié — soit $\vec{E}$ —. Le champ $\vec{E}_0$ ne représente plus qu'une première approximation valable

⁽¹⁾ Cette hypothèse sera discutée au Ch. VI, § 1.

⁽²⁾ Mie, voir note 1, p. 37.

lorsque la vitesse reste faible par rapport à celle de la lumière. Il y a lieu de lui ajouter en outre un deuxième champ : le champ magnétique, soit $\vec{H}$. $\vec{E}$ et $\vec{H}$ vérifient dans tout l'espace, supposé vide, les équations de Maxwell et les équations complémentaires. Une restriction s'impose en ce qui concerne le voisinage immédiat de l'électron où les équations de Maxwell ne s'appliquent probablement plus, le champ électrique ayant peut être une divergence non nulle. Comme nous ne savons pas ce qui s'y passe, nous n'en parlerons pas, d'autant plus que notre méthode, contrairement à celle des potentiels retardés, nous dispense de préciser.

Il va falloir chercher un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{H}$, solutions des équations de Maxwell, qui dépendent en outre des coordonnées de l'électron et de leurs dérivées successives par rapport au temps. $\vec{E}$ et $\vec{H}$ seront assujettis à tendre uniformément, le premier vers le champ électrostatique $\vec{E}_0$, le deuxième vers zéro, lorsque la vitesse de l'électron et ses dérivées successives par rapport au temps tendent vers zéro.

L'application de la méthode précédente est très simple, le champ électrostatique sera pris pour champ fondamental, puisqu'il en possède les propriétés, mais il ne représentera le champ électrique qu'en première approximation ; il dépend du temps par l'intermédiaire des coordonnées du point ω . On en déduira le champ magnétique fondamental $\vec{H}_1$ par la première relation de récurrence :

$$(9) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} = \text{rot } \vec{H}_1 \quad \text{div } \vec{H}_1 = 0$$

comme on le fait souvent lorsqu'on se borne à une première approximation, mais dans les calculs classiques, l'équation précédente représente la première équation de Maxwell. De notre point de vue, c'est une relation de récurrence et, de

même que $\vec{E}_0$ représente une première approximation du champ électrique, $\vec{H}_1$ représente une première approximation du champ magnétique, valable également dans les mêmes conditions.

C'est maintenant qu'apparaît l'originalité de notre méthode; elle permet de continuer et d'avoir des approximations de plus en plus précises en introduisant des termes correctifs d'ordre de plus en plus élevé.

On calculera le champ électrique du deuxième ordre $\vec{E}_2$ par les relations :

$$(10) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}_1}{\partial t} = - \operatorname{rot} \vec{E}_2 \quad \operatorname{div} \vec{E}_2 = 0.$$

On aura de même le champ magnétique du troisième ordre $\vec{H}_3$ par les relations suivantes, soient :

$$(11) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_2}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{H}_3 \quad \operatorname{div} \vec{H}_3 = 0$$

et ainsi de suite...

Le potentiel vecteur d'un vecteur donné n'est connu qu'à un gradient près. On le déterminera par la condition d'admettre un facteur intégrant (être orthogonal à son tourbillon) et de n'introduire aucune nouvelle singularité.

On aboutit à des développements sommables lorsque la vitesse de l'électron reste plus petite que celle de la lumière. On aperçoit ainsi la possibilité d'obtenir la répartition dans l'espace du champ électrique et du champ magnétique à un instant donné, dans le cas du mouvement quelconque.

§ 3. Manière de conduire les calculs. -- Les calculs ne devront pas être conduits en suivant à la lettre l'exposé théorique qui précède; en effet, la dérivée d'une fonction étant généralement plus compliquée que la fonction elle-même, il serait maladroit de dériver un vecteur par rapport

au temps et de chercher le potentiel vecteur de la dérivée. Il est beaucoup plus avantageux de calculer d'abord le potentiel vecteur et de dériver ensuite par rapport au temps. On intervertit ainsi l'ordre des dérivations mais le résultat reste le même. On a seulement abordé en premier lieu l'opération difficile (intégrations provenant de la recherche du potentiel vecteur) avant de compliquer le résultat par une dérivation par rapport à t . On fera exception pour la première relation afin d'éviter d'introduire des singularités gênantes.

On dérivera le vecteur $\vec{E}_0$ par rapport au temps, soit :

$$\vec{A}_0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t}.$$

Les relations :

$$\operatorname{div} \vec{E}_0 = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{E}_0 = 0$$

entraînent les relations :

$$\operatorname{div} \vec{A}_0 = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{A}_0 = 0.$$

On calculera une série de tourbillons ayant pour terme fondamental $\vec{A}_0$, chaque terme se déduisant du précédent par une relation alternée :

$$(12) \left\{ \begin{array}{lll} (0) & \vec{A}_0 = \operatorname{rot} \vec{B}_1 & \operatorname{div} \vec{B}_1 = 0 \\ (1) & \vec{B}_1 = -\operatorname{rot} \vec{A}_2 & \operatorname{div} \vec{A}_2 = 0 \\ & \dots & \dots \\ (2n-1) & \vec{B}_{2n-1} = -\operatorname{rot} \vec{A}_{2n} & \operatorname{div} \vec{A}_{2n} = 0 \\ (2n) & \vec{A}_{2n} = \operatorname{rot} \vec{B}_{2n+1} & \operatorname{div} \vec{B}_{2n+1} = 0 \\ (2n+1) & \vec{B}_{2n+1} = -\operatorname{rot} \vec{A}_{2n+2} & \operatorname{div} \vec{A}_{2n+2} = 0 \\ & \dots & \dots \end{array} \right.$$

Nous allons montrer que les termes successifs du développement du champ électrique et ceux du champ magnétique seront donnés par les relations :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{H}_1 = \vec{B}_1 \quad \vec{H}_3 = \frac{1}{c^3} \frac{\partial^2 \vec{B}_3}{\partial t^2} \quad \dots \\ \vec{H}_{2n-1} = \frac{1}{c^{2n-2}} \frac{\partial^{2n-2} \vec{B}_{2n-1}}{\partial t^{2n-2}} \quad \vec{H}_{2n+1} = \frac{1}{c^{2n}} \frac{\partial^{2n} \vec{B}_{2n+1}}{\partial t^{2n}} \quad \dots \end{array} \right.$$

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_2 = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_2}{\partial t} \quad \vec{E}_4 = \frac{1}{c^3} \frac{\partial^3 \vec{A}_4}{\partial t^3} \quad \dots \\ \vec{E}_{2n} = \frac{1}{c^{2n-1}} \frac{\partial^{2n-1} \vec{A}_{2n}}{\partial t^{2n-1}} \quad \dots \end{array} \right.$$

En effet, les groupes (12), (13) et (14) ... sont équivalents relations 9, 10, 11, ect ... du paragraphe 2. Pour le démontrer, dérivons par rapport au temps les relations de récurrence du groupe (12). Dérivons une fois la relation (1), deux fois la relation (2) ... $2n-1$ fois la relation $2n-1$, $2n$ fois la relation $2n$, $2n+1$ fois la relation $2n+1$... etc ... et multiplions les deux membres de ces relations respectivement par $1/c$, $(1/c)^2$... $(1/c)^{2n-1}$ $(1/c)^{2n}$ $(1/c)^{2n+1}$... etc ... On a

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} = \text{rot } \vec{B}_1 \quad \text{div } \vec{B}_1 = 0$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = - \text{rot } \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} \quad \text{div } \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} = 0$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_2}{\partial t} \right) = \text{rot } \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}_3}{\partial t^2} \quad \text{div } \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}_3}{\partial t^2} = 0$$

.....

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^{2n-1}} \frac{\partial^{2n-1} \vec{A}_{2n}}{\partial t^{2n-1}} \right) = \text{rot } \frac{1}{c^{2n}} \frac{\partial^{2n} \vec{B}_{2n+1}}{\partial t^{2n}} \quad \text{div } \frac{1}{c^{2n}} \frac{\partial^{2n} \vec{B}_{2n+1}}{\partial t^{2n}} = 0$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^{2n}} \frac{\partial^{2n} \vec{B}_{2n+1}}{\partial t^{2n}} \right) = \text{rot} \frac{1}{c^{2n+1}} \frac{\partial^{2n+1} \vec{B}_{2n+2}}{\partial t^{2n+1}}$$

$$\text{div} \frac{1}{c^{2n+1}} \frac{\partial^{2n+1} \vec{A}_{2n+2}}{\partial t^{2n+1}}$$

.

En tenant compte des relations (13) et (14) on retrouve bien les relations 9, 10, 11 ... ect ... du § 2, soient :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} = \text{rot} \vec{H}_1 \qquad \text{div} \vec{H}_1 = 0$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}_1}{\partial t} = - \text{rot} \vec{E}_2 \qquad \text{div} \vec{E}_2 = 0$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_2}{\partial t} = \text{rot} \vec{H}_3 \qquad \text{div} \vec{H}_3 = 0$$

.

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_{2n}}{\partial t} = \text{rot} \vec{H}_{2n+1} \qquad \text{div} \vec{H}_{2n+1} = 0$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}_{2n+1}}{\partial t} = - \text{rot} \vec{E}_{2n+2} \qquad \text{div} \vec{E}_{2n+2} = 0$$

.

C. Q. F. D.

Considérons un électron en mouvement, soit e sa charge, M sa position à l'instant t , $\vec{V}$ sa vitesse. Soit P un point quelconque de l'espace, posons $\vec{MP} = \vec{r}$.

Si l'électron était immobile, le champ électrique au point P aurait pour expression le champ électrostatique ou champ de Coulomb :

$$\vec{E}_0 = e \frac{\vec{r}}{r^3}. \qquad (15)$$

Pour obtenir deux vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{H}$, solutions des équations de Maxwell et susceptibles de représenter le champ

électrique et le champ magnétique de l'électron en mouvement, il convient de former d'abord le vecteur :

$$\vec{A}_0 = \frac{d\vec{E}_0}{dt}$$

puis, de chercher une série de tourbillons ayant $\vec{A}_0$ pour terme fondamental, soit :

$$\vec{A}_0 \quad \vec{B}_1 \quad \vec{A}_2 \quad \vec{B}_3 \quad \vec{A}_4 \quad \dots \quad \vec{A}_{2n} \quad \vec{B}_{2n+1} \quad \dots$$

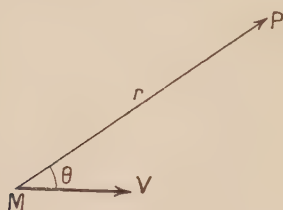


Fig. 13.

enfin, de dériver par rapport au temps pour obtenir les termes successifs qui composent le développement du champ électrique et du champ magnétique.

En dérivant vectoriellement la formule (15) on a :

$$\frac{d\vec{E}_0}{dt} = e \left[\frac{1}{r^3} \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{3}{r^4} \frac{dr}{dt} \vec{r} \right].$$

Si nous appelons θ l'angle que fait le vecteur $\vec{MP} = \vec{r}$ avec le vecteur vitesse $\vec{V} = -\frac{d\vec{r}}{dt}$, on voit que l'on a $\frac{dr}{dt} = -V \cos \theta$ (fig. 13),

$$\frac{d\vec{E}_0}{dt} = -e \left(\frac{\vec{V}}{r^3} + 3 \frac{r}{r^4} V \cos \theta \right).$$

Construisons le trièdre mobile unitaire trirectangle $P \begin{smallmatrix} \vec{\rho} \\ \vec{\tau} \\ \vec{\nu} \end{smallmatrix}$ (fig. 14) déjà utilisé au chapitre II, $\vec{\rho}$ étant dirigé suivant $\vec{MP}$,

$\vec{\tau}$ étant situé dans un plan passant par $\vec{V}$, le sens de rotation qui amène $\vec{\rho}$ sur $\vec{\tau}$ étant celui qui amène $\vec{V}$ sur $\vec{MP}$. $\vec{v}$ étant perpendiculaire au plan contenant $\vec{V}$ et $\vec{MP}$ et dirigé de manière à ce que le trièdre soit direct. Avec ces notations, le champ $\frac{d\vec{E}_0}{dt}$ a pour expression :

$$\frac{d\vec{E}_0}{dt} = \frac{e}{r^3} V [2\vec{\rho} \cos \theta + \vec{\tau} \sin \theta].$$

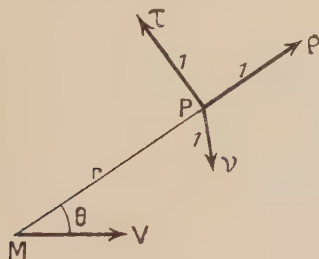


Fig. 14.

Il reste à trouver une série de tourbillons ayant $\frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t}$ pour terme fondamental et dont les termes successifs n'admettent pas d'autre singularité que le point M. Ce problème a été résolu au chapitre II. On a obtenu la suite des champs :

$$\begin{aligned} \vec{A}_0 &= \frac{1}{r^3} [2\vec{\rho} \cos \theta - \vec{\tau} \sin \theta] & \vec{B}_1 &= \frac{\vec{v}}{r^2} \sin \theta \\ \vec{A}_2 &= -\frac{1}{2!} \frac{1}{r} [2\vec{\rho} \cos \theta - \vec{\tau} \sin \theta] & \vec{B}_3 &= -\frac{1}{2!} \vec{v} \sin \theta \\ \vec{A}_4 &= -\frac{3}{4!} r [2\vec{\rho} \cos \theta - 3\vec{\tau} \sin \theta] & \vec{B}_5 &= -\frac{3}{4!} r^2 \vec{v} \sin \theta \\ &\dots & & \\ \vec{A}_{2n} &= -\frac{2n-1}{2n!} r^{2n-3} [2\vec{\rho} \cos \theta - (2n-1) \vec{\tau} \sin \theta] & & \\ && \vec{B}_{2n+1} &= -\frac{2n-1}{2n!} r^{2n-2} \vec{v} \sin \theta \\ &\dots & & \end{aligned}$$

Rappelons que l'on a :

$$\begin{aligned} \vec{A}_0 &= \text{rot } \vec{B}_1 & \vec{B}_1 &= -\text{rot } \vec{A}_2 & \vec{A}_2 &= \text{rot } \vec{B}_3 \dots \\ \dots & \vec{A}_{2n} &= \text{rot } \vec{B}_{2n+1} & \vec{B}_{2n+1} &= -\text{rot } \vec{A}_{2n+2} \dots \text{ etc } \dots \end{aligned}$$

Il suffira de multiplier tous ces termes par eV pour avoir une série satisfaisant aux conditions du problème. Il n'y a plus qu'à dériver un nombre convenable de fois par rapport au temps les différents termes de la série A et ceux de la série B et à multiplier les résultats par une puissance convenable de $1/c$, conformément aux formules (13) et (14) pour obtenir les termes successifs du développement du champ électrique et ceux du champ magnétique. La dérivation par rapport au temps est assez compliquée lorsque le mouvement est quelconque; elle l'est beaucoup moins lorsque le mouvement est rectiligne.

CHAPITRE IV

Application à l'électron en mouvement rectiligne. Champ à faible distance de l'électron.

SOMMAIRE. — Le champ électrique et le champ magnétique de l'électron en mouvement rectiligne, à un instant donné, dépendent, non seulement de la position M de l'électron à cet instant, mais encore de la vitesse $\vec{V} = \frac{d\vec{M}}{dt}$, de l'accélé-

ration $\vec{\Gamma} = \frac{d^2\vec{M}}{dt^2}$ et de toutes leurs dérivées successives $\frac{d^3\vec{M}}{dt^3}$, $\frac{d^4\vec{M}}{dt^4}$... $\frac{d^n\vec{M}}{dt^n}$... etc ... par rapport au temps.

L'expression des champs, à une distance r de l'électron, se présente sous la forme d'une série double dont les lignes sont ordonnées suivant les puissances croissantes de $1/c$ et les colonnes, suivant les puissances croissantes de r , par l'intermédiaire des coefficients sans dimension :

$$\beta, \frac{r}{c} \frac{d\beta}{dt}, \left(\frac{r}{c}\right)^2 \frac{d^2\beta}{dt^2}, \dots \left(\frac{r}{c}\right)^n \frac{d^n\beta}{dt^n}, \dots \text{etc} \dots \text{avec } \beta = \frac{v}{c}.$$

Il serait peut-être possible de faire entrer ces développements dans une forme symbolique connue. Nous nous sommes contentés de grouper les termes suivant les puissances croissantes de r et d'étudier les termes en $1/r^2$ et en $1/r$ qui

représentent *le champ à faible distance*, ou plus exactement, pour les faibles valeurs du coefficient sans dimensions :

$$\gamma = \frac{\Gamma r}{c^2}.$$

Les formules que nous obtenons ont des applications intéressantes en électromagnétisme (Chapitre VI).

Lorsque le mouvement est uniforme, les expressions du champ se réduisent aux formules de Thomson ; elles sont *alors valables à grande distance*.

§ 1. *Dérivation par rapport au temps.* — Nous supposons que l'électron se meut sur un axe $x'x$ (fig. 15). Soit M sa position,

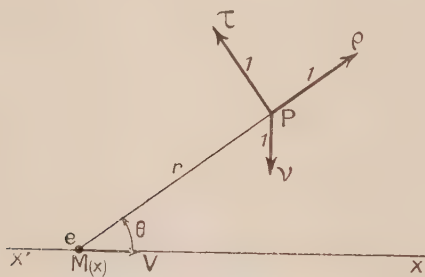


Fig. 15.

x son abscisse. Nous conservons les notations du chapitre précédent. Les vecteurs $\vec{\rho}$ et $\vec{\tau}$ restent dans le plan déterminé par l'axe et le point P. Le vecteur $\vec{v}$ est fixe, le trièdre $\vec{\rho} \vec{\tau} \vec{v}$ tourne autour de $\vec{v}$. Soit $\vec{B}$ un vecteur associé à la position du point M et dirigé suivant $\vec{v}$, il sera de la forme :

$$\vec{B} = \vec{v} \Phi(r, \theta).$$

Lorsque l'électron parcourt l'élément de longueur dx , le champ varie de la quantité :

$$\vec{dB} = \frac{d\vec{B}}{dx} dx = \vec{v} \frac{d\Phi}{dx} dx.$$

La quantité $\frac{d\Phi}{dx}$ est facile à calculer en fonction des dérivées par rapport à r et à θ , il suffit de transporter l'origine

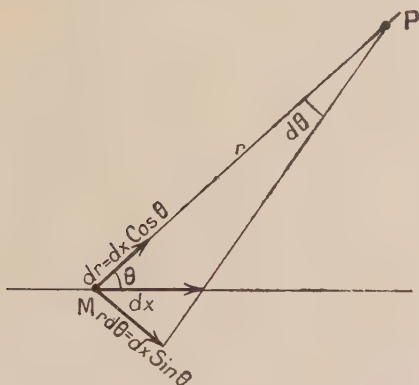


Fig. 16.

au point P et d'utiliser les formules de changement de variable du chapitre II. Il est encore plus simple de l'établir géométriquement. Lorsque M parcourt l'élément de longueur dx (fig. 16), r varie de :

$$dr = - dx \cos \theta.$$

θ varie de $d\theta$. On a en projetant ds sur une direction perpendiculaire à r :

$$r d\theta = dx \sin \theta$$

on en déduit :

$$\frac{dr}{dx} = - \cos \theta \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{r} \sin \theta.$$

On a d'autre part :

$$(I) \quad \frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{dr}{dx} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dx} = -\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

ou :

$$\frac{d\Phi}{dx} = -\cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}.$$

Φ est une fonction de x ; x est une fonction de t , Φ est par suite une fonction de t . On a :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dx} \frac{dx}{dt} = V \frac{d\Phi}{dx} = \varphi(r, \theta) \frac{dx}{dt}$$

en posant :

$$\varphi = \frac{d\Phi}{dx}.$$

En poursuivant les dérivations par rapport au temps, on trouve :

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left(\varphi \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d\varphi}{dx} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \varphi \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$(2) \quad \frac{d^2}{dt^2} \left(\varphi \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2\varphi}{dx^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 + 3 \frac{d\varphi}{dx} \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \varphi \frac{d^3x}{dt^3}$$

$$(3) \quad \frac{d^3}{dt^3} \left(\varphi \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^3\varphi}{dx^3} \left(\frac{dx}{dt} \right)^4 + 6 \frac{d^2\varphi}{dx^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{d\varphi}{dx} \frac{dx}{dt} \frac{d^3x}{dt^3} + \dots$$

$$(4) \quad \frac{d^4}{dt^4} \left(\varphi \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^4\varphi}{dx^4} \left(\frac{dx}{dt} \right)^5 + 10 \frac{d^3\varphi}{dx^3} \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 \frac{d^2x}{dt^2} + 10 \frac{d^2\varphi}{dx^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \frac{d^3x}{dt^3} + \dots$$

$$(5) \quad \frac{d^5}{dt^5} \left(\varphi \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^5\varphi}{dx^5} \left(\frac{dx}{dt} \right)^6 + 15 \frac{d^4\varphi}{dx^4} \left(\frac{dx}{dt} \right)^4 \frac{d^2x}{dt^2} + 20 \frac{d^3\varphi}{dx^3} \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 \frac{d^3x}{dt^3} + \dots$$

$$(6) \quad \frac{d^6}{dt^6} \left(\varphi \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^6\varphi}{dx^6} \left(\frac{dx}{dt} \right)^7 + 21 \frac{d^5\varphi}{dx^5} \left(\frac{dx}{dt} \right)^5 \frac{d^2x}{dt^2} + 35 \frac{d^4\varphi}{dx^4} \left(\frac{dx}{dt} \right)^4 \frac{d^3x}{dt^3} + \dots$$

$$(7) \quad \frac{d^7}{dt^7} \left(\varphi \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^7\varphi}{dx^7} \left(\frac{dx}{dt} \right)^8 + 28 \frac{d^6\varphi}{dx^6} \left(\frac{dx}{dt} \right)^6 \frac{d^2x}{dt^2} + 56 \frac{d^5\varphi}{dx^5} \left(\frac{dx}{dt} \right)^5 \frac{d^3x}{dt^3} + \dots$$

$$(8) \quad \frac{d^8}{dt^8} \left(\varphi \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^8\varphi}{dx^8} \left(\frac{dx}{dt} \right)^9 + 36 \frac{d^7\varphi}{dx^7} \left(\frac{dx}{dt} \right)^7 \frac{d^2x}{dt^2} + 84 \frac{d^6\varphi}{dx^6} \left(\frac{dx}{dt} \right)^6 \frac{d^3x}{dt^3} + \dots$$

.....

$$\begin{aligned}
(3) \dots + \varphi \frac{d^4 x}{dt^4} & \qquad \qquad \qquad + \quad 3 \frac{d^2 \varphi}{dx} \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)^2 \\
(4) \dots + 5 \frac{d^2 \varphi}{dx} \frac{dx}{dt} \frac{d^4 x}{dt^4} & \qquad \qquad \qquad + \varphi \frac{d^5 x}{dt^5} \qquad \qquad \qquad + 15 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \frac{dx}{dt} \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)^2 \qquad \qquad \qquad + 10 \frac{d^2 \varphi}{dx} \frac{d^3 x}{dt^3} \frac{d^3 x}{dt^3} \\
(5) \dots + 15 \frac{d^3 \varphi}{dx^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \frac{d^4 x}{dt^4} & \qquad \qquad \qquad + 6 \frac{d^2 \varphi}{dx} \frac{dx}{dt} \frac{d^5 x}{dt^5} \qquad \qquad \qquad + \dots + 45 \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)^2 \qquad \qquad \qquad + 50 \frac{d^2 \varphi}{dx^3} \frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{d^3 x}{dt^3} + \dots \\
(6) \dots + 35 \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 \frac{d^4 x}{dt^4} & \qquad \qquad \qquad + 21 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \frac{d^5 x}{dt^5} \qquad \qquad \qquad + \dots + 105 \frac{d^4 \varphi}{dx^4} \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)^2 \qquad \qquad \qquad + 160 \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{d^3 x}{dt^3} + \dots \\
(7) \dots + 70 \frac{d^4 \varphi}{dx^4} \left(\frac{dx}{dt} \right)^4 \frac{d^4 x}{dt^4} & \qquad \qquad \qquad + 56 \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 \frac{d^5 x}{dt^5} \qquad \qquad \qquad + \dots + 210 \frac{d^5 \varphi}{dx^5} \left(\frac{dx}{dt} \right)^4 \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)^2 \qquad \qquad \qquad + 405 \frac{d^4 \varphi}{dx^4} \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{d^3 x}{dt^3} + \dots \\
(8) \dots + 126 \frac{d^5 \varphi}{dx^5} \left(\frac{dx}{dt} \right)^5 \frac{d^4 x}{dt^4} & \qquad \qquad \qquad + 126 \frac{d^4 \varphi}{dx^4} \left(\frac{dx}{dt} \right)^4 \frac{d^5 x}{dt^5} \qquad \qquad \qquad + \dots + 330 \frac{d^6 \varphi}{dx^6} \left(\frac{dx}{dt} \right)^5 \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)^2 \qquad \qquad \qquad + 881 \frac{d^5 \varphi}{dx^5} \left(\frac{dx}{dt} \right)^4 \frac{d^3 x}{dt^3} \frac{d^3 x}{dt^3} + \dots
\end{aligned}$$

Le tableau des coefficients des termes du premier degré en $\frac{d^2x}{dt^2} \frac{d^2x}{dt^2} \dots \frac{d^nx}{dt^n} \dots$ etc ... est celui du développement du binôme (ou triangle de Pascal), auquel on a ôté la deuxième colonne.

§ 2. Calcul des coefficients du champ magnétique ⁽¹⁾. —
Premier terme :

On a :

$$\vec{H}_1 = \frac{1}{c} e V \vec{B}_1 = v \frac{V}{c} \frac{e}{r^2} \sin \theta.$$

Deuxième terme :

On a :

$$\vec{B}_3 = -\frac{1}{2} v \sin \theta \quad \text{et} \quad \vec{H}_3 = \frac{1}{c^3} e \frac{\partial^2}{\partial t^2} (V \vec{B}_3)$$

On pose :

$$B_3 = -\frac{v}{2} V \varphi_3(\theta) \quad \text{avec} \quad \varphi_3(\theta) = \sin \theta$$

en se reportant à (I), on trouve :

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = \frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} = \frac{1}{r^2} \sin \theta (2 - 3 \sin^2 \theta).$$

On en déduit, en se reportant aux formules (1) et (2), § 1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (V \varphi_3) &= \frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \sin \theta \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} (V \varphi_3) &= \frac{1}{r^2} \sin \theta (2 - 3 \sin^2 \theta) \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 \\ &\quad + \frac{3}{r} \sin \theta \cos \theta \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{2} \sin \theta \frac{d^3x}{dt^3} \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Pour simplifier les calculs, nous posons momentanément $e = 1$.

D'où, en posant :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= V & \frac{d^2x}{dt^2} &= \Gamma & \frac{d^3x}{dt^3} &= \Gamma' \\ H_3 &= -\frac{V^3}{c^3} \frac{\sin \theta}{r^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right) \\ &\quad - \frac{3}{2} V \Gamma \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{c^3} \sin \theta. \end{aligned}$$

Troisième terme :

On a :

$$\vec{B}_5 = -\frac{3}{4!} \vec{v} r^2 \sin \theta.$$

ainsi que :

$$\vec{H}_5 = \frac{1}{c^5} e \frac{d^4}{dt^4} (\vec{v} B_5) = -\frac{3}{4!} \vec{v} e \frac{d^4}{dt^4} (V r^2 \sin^2 \theta).$$

En se reportant à la formule (I) dans laquelle $\varphi(r, \theta) = r^2 \sin \theta$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (r^2 \sin \theta) &= r(-2 \sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta) = -r \sin \theta \cos \theta \\ \frac{d^2}{dx^2} (r^2 \sin \theta) &= -\frac{d}{dx} (r \sin \theta \cos \theta) = \sin^3 \theta \\ \frac{d^3}{dx^3} (r^2 \sin \theta) &= \frac{3}{r} \sin^3 \theta \cos \theta \\ \frac{d^4}{dx^4} (r^2 \sin \theta) &= \frac{3}{r^2} \left(1 - \frac{5}{4} \sin^2 \theta\right) \sin^3 \theta. \end{aligned}$$

On aura les dérivées par rapport au temps en se reportant aux formules (3) et (4), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dt^3} \left(r^2 \sin \theta \frac{dx}{dt} \right) &= -\frac{3}{r} \sin^3 \theta \cos \theta \left(\frac{dx}{dt} \right)^4 \\ &\quad - 6 \sin^3 \theta \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \frac{d^2x}{dt^2} + 4r \sin \theta \cos \theta \frac{dx}{dt} \frac{d^3x}{dt^3} \\ &\quad + 3r \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)^2 - r^2 \sin^2 \theta \frac{d^4x}{dt^4} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{d^4}{dt^4} \left(r^2 \sin \theta \frac{dx}{dt} \right) &= \frac{12}{r^2} \left(1 - \frac{5}{4} \sin^2 \theta \right) \sin^3 \theta \left(\frac{dx}{dt} \right)^5 \\ &\quad + \frac{30}{r} \sin^3 \theta \cos \theta \left(\frac{dx}{dt} \right) \frac{d^2 x}{dt^2} + 15 \sin^3 \theta \frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} \\ &\quad - 10 r \sin \theta \cos \theta \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{d^3 x}{dt^3} - 5 r \sin \theta \cos \theta \frac{dx}{dt} \frac{d^4 x}{dt^4} \\ &\quad + r^2 \sin \theta \frac{d^5 x}{dt^5}. \end{aligned}$$

Avec les notations précédentes

$$\left(\frac{dx}{dt} = V, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \Gamma, \quad \frac{d^3 x}{dt^3} = \Gamma' \text{ et en posant } \frac{d^4 x}{dt^4} = \Gamma'' \right)$$

on a :

$$\begin{aligned} \vec{H}_5 = \vec{v} \left\{ - \frac{3}{2} \frac{V^5}{c^5} \frac{\sin^3 \theta}{r^2} \left(1 - \frac{5}{4} \sin^2 \theta \right) \right. \\ \left. - \frac{15}{4} \frac{V^3 \Gamma}{c^5} \frac{\sin^3 \theta \cos \theta}{r} - \frac{5}{8} \frac{V}{c} \left(2 \frac{V \Gamma'}{c^4} + 3 \frac{\Gamma^2}{c^4} \right) \sin^3 \theta \right. \\ \left. + \frac{5}{8} \frac{r}{c^5} (V \Gamma'' + 2 \Gamma \Gamma') \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{8} \frac{\Gamma''}{c^5} r^2 \sin^2 \theta \right\}. \end{aligned}$$

Nous rassemblons les premiers résultats dans le tableau 10, p. 58.

REMARQUES. — 1° Le développement du champ magnétique se présente sous la forme d'un tableau triangulaire, comme par exemple celui de la fonction e^{r+a} qui a pour expression :

1	+ a	+ $\frac{1}{2} a^2$	+ $\frac{1}{3!} a^3$	+ $\frac{1}{4!} a^4$	... + ...
	+ r	+ ar	+ $\frac{3}{3!} a^2 r$	+ $\frac{4}{4!} a^3 r$	... + ...
		+ $\frac{1}{2!} r^2$	+ $\frac{3}{3!} ar^2$	+ $\frac{6}{4!} a^2 r^2$	... + ...
			+ $\frac{1}{3!} r^3$	+ $\frac{4}{4!} ar^3$	... + ...
				+ $\frac{1}{4!} r^4$	... + ...
					... + ...

	H_1	H_3	H_5	
r^{-2}	$\frac{V \sin \theta}{c} \frac{1}{r^2}$	$-\frac{V^3}{c^3} \frac{\sin \theta}{r^3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right)$	$-\frac{3}{2} \frac{V^5}{c^5} \frac{\sin^3 \theta}{r^3} \left(1 - \frac{5}{2} \sin^2 \theta\right)$	
r^{-1}		$-\frac{3}{2} \frac{V \Gamma}{c^3} \frac{\sin \theta}{r^4} \cos \theta$	$-\frac{15}{4} \frac{V^3 \Gamma}{c^5} \frac{\sin \theta^2 \cos \theta}{r}$	
r^0		$-\frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{c^3} \sin \theta$	$-\frac{5}{2} \frac{V}{c} \left(2 \frac{V \Gamma'}{c^4} + 3 \frac{\Gamma^2}{c^4}\right) \sin^3 \theta$	
r^1			$\frac{5}{8} r \left(\frac{V \Gamma''}{c^5} + 2 \frac{\Gamma \Gamma'}{c^5}\right) \sin \theta \cos \theta$	
r^2			$-\frac{3}{41} \frac{\Gamma'''}{c^5} r^2 \sin \theta$	
. . . .				

2° Tous les termes disposés sur une même ligne du tableau 10 sont du même degré par rapport à r . Si on sait effectuer la sommation suivant les différentes lignes, la première ligne donnera une fonction de θ et de β ($\beta = \frac{v}{c}$), la deuxième ligne donnera une fonction de θ , de β , et de γ ($\gamma = \frac{\Gamma r}{c^2}$) etc... Le champ se présentera comme une série simple de la forme.

$$H = \frac{1}{r^2} [F_1(\theta, \beta) + F_2(\theta, \beta, \gamma) + F_3(\theta, \beta, \gamma, \gamma') + F_4(\theta, \beta, \gamma, \gamma', \gamma'') + \dots]$$

avec :

$$\gamma' = \frac{\Gamma' r^2}{c^3} \quad \gamma'' = \frac{\Gamma'' r^3}{c^4} \dots \text{etc} \dots$$

Il serait peut-être possible d'effectuer encore ce deuxième genre de sommation et de faire entrer l'expression du champ magnétique dans une forme symbolique connue, mais cette opération nécessiterait la connaissance du terme général. Nous nous contenterons seulement d'en calculer les premiers termes qui correspondent aux faibles valeurs de $\gamma\gamma'\gamma''$, etc... ce qui nous donnera *le champ à faible distance de l'électron*.

§ 3. — Champ magnétique à faible distance de l'électron.

— Nous effectuerons la sommation pour les termes en r^{-2} , r^{-1} et r^0 ; nous continuerons donc le calcul précédent afin d'obtenir un plus grand nombre de colonnes, mais nous n'écrirons que les quatre premières lignes.

Quatrième terme :

On a :

$$\vec{B}_7 = -\frac{5}{6!} \vec{v} \frac{d^6}{dt^6} (V r^4 \sin \theta)$$

et :

$$\vec{H}_7 = \frac{1}{c^7} \frac{d^6}{dt^6} (V \vec{B}_7) = -\frac{5}{6!} \vec{v} \frac{d^6}{dt^6} (V r^4 \sin \theta).$$

On calcule de la même façon (formule 1) :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} (r^4 \sin \theta) &= -3r^3 \sin \theta \cos \theta \\ \frac{d^2}{dx^2} (r^4 \sin \theta) &= 3r^2 \sin \theta (2 - \sin^2 \theta) \\ \frac{d^3}{dx^3} (r^4 \sin \theta) &= -3r \sin \theta \cos \theta (2 + \sin^2 \theta) \\ \frac{d^4}{dx^4} (r^4 \sin \theta) &= 9 \sin^5 \theta \\ \frac{d^5}{dx^5} (r^4 \sin \theta) &= \frac{45}{r} \sin^5 \theta \cos \theta \\ \frac{d^6}{dx^6} (r^4 \sin \theta) &= \frac{45}{r^2} (6 - 7 \sin^2 \theta) \sin^5 \theta.\end{aligned}$$

En se reportant aux formules (5) et (6) :

$$\begin{aligned}\frac{d^5}{dt^5} \left(r^4 \sin \theta \frac{dx}{dt} \right) &= \frac{45}{r} \sin^5 \theta \cos \theta \left(\frac{dx}{dt} \right)^6 \\ &\quad + 9.15 \sin^5 \theta \left(\frac{dx}{dt} \right)^4 \frac{d^2 x}{dt^2} + \dots \\ \frac{d^6}{dt^6} \left(r^4 \sin \theta \frac{dx}{dt} \right) &= \frac{45}{r^2} (6 - 7 \sin^2 \theta) \sin^5 \theta \left(\frac{dx}{dt} \right)^7 \\ &\quad + \frac{21}{r} \frac{45}{2} \sin^5 \theta \cos \theta \left(\frac{dx}{dt} \right)^6 \frac{d^2 x}{dt^2} + 9 \cdot 35 \sin^5 \theta \left(\frac{dx}{dt} \right)^4 \frac{d^3 x}{dt^3} \\ &\quad + 105.9. \sin^5 \theta \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 \frac{d^3 x}{dt^3} + \dots\end{aligned}$$

Les termes non écrits correspondent aux puissances positives de r , on a alors :

$$\begin{aligned}\vec{H}_7 &= -\frac{5}{6!} \vec{v} \frac{V}{c} \sin \theta \left[\frac{3.5}{2.4} \frac{V^6}{c^6} \frac{\sin^4 \theta}{r^2} \left(1 - \frac{7}{6} \sin^2 \theta \right) \right. \\ &\quad + \frac{3}{2} \frac{5.7}{2.4} \frac{V^4 \Gamma}{c^6} \sin^4 \theta \cos \theta + \frac{3}{2} \frac{5}{4} \frac{7}{2} \frac{V^3 \Gamma^2}{c^6} \sin^4 \theta \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{5.7}{2.4} \frac{V^3 \Gamma^3}{c^6} \sin^4 \theta + \dots \right].\end{aligned}$$

On peut encore écrire, en mettant en évidence les groupements sans dimension :

$$\beta = \frac{V}{c} \quad \gamma = \frac{\Gamma r}{c} \quad \gamma' = \frac{\Gamma r^2}{c^3}$$

$$\begin{aligned}\vec{H}_7 = & -\frac{5}{6!} \vec{\nu} \frac{1}{r^2} \beta \sin \theta \left[\frac{3.5}{2.4} \beta^6 \sin^4 \theta (1 - \frac{7}{6} \sin \theta) \right. \\ & + \frac{3}{2} \frac{5.7}{2.4} \beta^4 \gamma \sin^4 \theta \cos \theta + \frac{7}{2} \frac{3.5}{2.4} \beta^2 \gamma^2 \sin^4 \theta \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{5.7}{2.4} \gamma' \sin^4 \theta + \dots \right].\end{aligned}$$

Cinquième terme :

On a :

$$\vec{B}_9 = -\frac{7}{8!} \vec{\nu} r^6 \sin \theta \quad \text{et} \quad \vec{H}_9 = \frac{1}{c^9} e \frac{d^8}{dt^8} (V \vec{B}_9)$$

ou :

$$\vec{H}_9 = -\frac{7}{8!} \frac{\vec{\nu} e}{c^9} \frac{d^8}{dt^8} (V r^6 \sin \theta)$$

on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} (r^6 \sin \theta) &= -5r^5 \sin \theta \cos \theta \\ \frac{d^2}{dx^2} (r^6 \sin \theta) &= 5r^4 \sin \theta (4 - 3 \sin^2 \theta) \\ \frac{d^3}{dx^3} (r^6 \sin \theta) &= -15r^3 (4 - \sin^2 \theta) \sin \theta \cos \theta \\ \frac{d^4}{dx^4} (r^6 \sin \theta) &= 15r^2 \sin \theta (8 - 4 \sin^2 \theta - \sin^4 \theta) \\ \frac{d^5}{dx^5} (r^6 \sin \theta) &= 15r (8 + 4 \sin^2 \theta + 3 \sin^4 \theta) \sin \theta \cos \theta \\ \frac{d^6}{dx^6} (r^6 \sin \theta) &= 15^2 \sin^7 \theta \\ \frac{d^7}{dx^7} (r^6 \sin \theta) &= 15^2 \cdot 7 \cdot \frac{1}{r} \sin^7 \theta \cos \theta \\ \frac{d^8}{dx^8} (r^6 \sin \theta) &= 15^2 \cdot 7 \cdot \frac{1}{r^2} \sin^7 \theta (8 - 9 \sin^2 \theta)\end{aligned}$$

On a, en se reportant aux formules (7) et (8) et en s'arrêtant aux puissances positives de r :

$$\begin{aligned}\frac{d^7}{dt^7} \left(r^6 \sin \theta \frac{dx}{dt} \right) &= 15^2 \cdot 7 \cdot \frac{1}{r} V^8 \sin^7 \theta \cos \theta \\ &+ 28 \cdot 15^2 V^6 \Gamma \sin^7 \theta + \dots\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\frac{d^8}{dt^8}(Vr^6 \sin \theta) &= 15^2 \cdot 7 \cdot \frac{1}{r^2} V^9 \sin^7 \theta (8 - 9 \sin^2 \theta) \\ &\quad + 15^2 \cdot 7 \cdot 36 \frac{1}{r} V^6 \Gamma \sin^6 \theta \cos \theta \\ &\quad + (84 V^5 \Gamma' + 33 V^4 \Gamma^2) 15^2 \sin^7 \theta + \dots\end{aligned}$$

On a par suite :

$$\begin{aligned}\vec{H}_9 &= - \frac{7}{8!} \frac{1}{c^9} \frac{d^8}{dt^8} \vec{v}(Vr^6 \sin \theta) \\ &= \vec{v} \left[\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{V_9}{c^9} \frac{1}{r^2} \sin^8 \theta \left(1 - \frac{9}{8} \sin^2 \theta\right) \right. \\ &\quad + \frac{3}{2} \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{V^7 \Gamma}{c^9} \frac{1}{r} \sin^7 \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{V^6 \Gamma'}{c^9} \sin^7 \theta \\ &\quad \left. + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \frac{7 \cdot 9}{2 \cdot 4} \frac{V^5 \Gamma^2}{c^9} \sin^7 \theta + \dots \right]\end{aligned}$$

Nous sommes en mesure d'ajouter deux colonnes au tableau 10. Nous aurons, en nous bornant aux quatre premières lignes, le tableau de la p. 63.

On reconnaît dans la première ligne, le développement de la fonction :

$$\frac{1}{r} \frac{V}{c} \sin \theta \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

C'est la formule de Thomson ⁽¹⁾ qui représente le champ dû à la vitesse.

La deuxième ligne représente le développement de la fonction :

$$-\frac{3}{2} \frac{1}{r} \frac{V \Gamma}{c^3} \sin \theta \cos \theta \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{-\frac{5}{2}},$$

c'est la correction due à l'accélération, lorsque celle-ci ou la distance r sont assez faibles pour qu'on puisse négliger les termes en $\left(\frac{\Gamma r}{c^2}\right)^2$.

⁽¹⁾ J. J. THOMSON. Recent Researches, 1892.

	H_1	H_3	H_5	H_7	
r^{-2}	$\frac{V \sin \theta}{c} \frac{1}{r^2}$	$-\frac{V^3}{c^3} \frac{\sin \theta}{r^2} (1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta)$	$-\frac{3}{2} \frac{V^5}{c^5} \frac{\sin^3 \theta}{r^2} (1 - \frac{5}{4} \sin^2 \theta)$	$-\frac{3}{2} \frac{5.7}{4.6} \frac{V^9}{c^9} \frac{\sin^7 \theta}{r^2} (1 - \frac{9}{8} \sin^2 \theta)$	+
r^{-1}		$-\frac{3}{2} \frac{V\Gamma}{c^3} \frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta$	$-\frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{V^3\Gamma}{c^5} \frac{1}{r} \sin^3 \theta \cos \theta$	$-\frac{3}{2} \frac{5.7.9}{2.4.6} \frac{V^7\Gamma}{c^9} \frac{1}{r} \sin^7 \theta \cos \theta$	+
r^0			$-\frac{1}{2} \frac{5}{2} \frac{V^2\Gamma'}{c^5} \sin^3 \theta$	$-\frac{1}{2} \frac{5.7.9}{2.4.6} \frac{V^6\Gamma'}{c^9} \sin^7 \theta$	+
			$-\frac{3.5}{2.4} \frac{V\Gamma^2}{c^5} \sin^3 \theta$	$-\frac{3.5}{2.4} \frac{7.9}{2.4} \frac{V^5\Gamma^2}{c^9} \sin^7 \theta$	+

La troisième ligne représente la correction due à l'accélération seconde lorsque la quantité sans dimensions $\gamma' = \frac{\Gamma' r^2}{c^3}$ est assez faible pour qu'on puisse négliger les termes d'ordre supérieur par rapport à cette quantité. On reconnaît là le développement de la fonction :

$$\frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{c^3} \sin \theta \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{5}{2}}.$$

On reconnaît dans la quatrième ligne le développement de la fonction :

$$\frac{3.5}{2.4} \frac{V\Gamma^2}{c^5} \sin^2 \theta \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{7}{2}},$$

qui ajoute une deuxième approximation à l'effet de l'accélération.

*
..*

En résumé, le champ magnétique, à faible distance d'un électron en mouvement rectiligne de vitesse quelconque a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{H} = \vec{v} \sin \theta & \left[\frac{1}{r^2} \frac{V}{c} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{3}{2}} \right. \\ & - \frac{3}{2} \frac{1}{r} \frac{V\Gamma}{c^3} \cos \theta \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{5}{2}} \\ & - \frac{3.5}{2.4} \frac{V\Gamma^2}{c^5} \sin^2 \theta \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{7}{2}} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{c^3} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{5}{2}} \\ & \left. \dots \dots \dots \right] \end{aligned}$$

Lorsque le mouvement est uniforme, le champ se réduit à l'expression :

$$\vec{H} = \vec{v} \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{V}{c} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

C'est la formule de Thomson, elle est alors valable dans tout l'espace.

§ 4. **Champ électrique à faible distance.** — Le champ électrique peut s'obtenir de la même façon, en dérivant par rapport au temps les termes d'ordre pair de la série de tourbillon, conformément aux formules 16 (§ 3, chapitre III). Il est plus simple, dans le cas du mouvement rectiligne, d'utiliser le calcul du § précédent. Le travail est déjà tout préparé, nous avons en effet obtenu, en même temps que les termes du développement du champ magnétique, les termes :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}_3 &= \frac{1}{c^3} \frac{d}{dt} (\vec{VB}_3), & \vec{\mathcal{E}}_5 &= \frac{1}{c^4} \frac{d^3}{dt^3} (\vec{VB}_5), \\ \vec{\mathcal{E}}_7 &= \frac{1}{c^5} \frac{d^5}{dt^5} (\vec{VB}_7), & \vec{\mathcal{E}}_9 &= \frac{1}{c^6} \frac{d^7}{dt^7} (\vec{VB}_9), \dots\end{aligned}$$

qui ont été formés de la même façon, mais en dérivant une fois de moins par rapport au temps, on a par suite :

$$\begin{aligned}\vec{H}_3 &= \frac{1}{c} \frac{d\vec{\mathcal{E}}_3}{dt}, & \vec{H}_5 &= \frac{1}{c} \frac{d\vec{\mathcal{E}}_5}{dt}, \\ \vec{H}_7 &= \frac{1}{c} \frac{d\vec{\mathcal{E}}_7}{dt}, & \vec{H}_9 &= \frac{1}{c} \frac{d\vec{\mathcal{E}}_9}{dt}, \dots\end{aligned}$$

les calculs du § 3 ne donnent pas le terme $\vec{\mathcal{E}}_1$ qui vérifierait la relation :

$$\frac{1}{c} \frac{d\vec{\mathcal{E}}_1}{dt} = \vec{H}_1.$$

Le vecteur $\vec{\mathcal{E}}_1 = -v \frac{1}{r} \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ satisfait à cette condition, on a bien en effet :

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(-v \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} \right) = \frac{v}{c} \frac{d}{dx} \left(-v \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} \right) = \frac{v}{r^2} \frac{v}{c} \sin \theta$$

(en vertu de la formule (I) du § 1).

Nous réunirons également ces résultats dans un tableau, soit :

	$\mathcal{H}_1$	$\mathcal{H}_3 = \frac{1}{c^2} \frac{dB_3}{dt}$	$\mathcal{H}_5 = \frac{1}{c^4} \frac{d^3B_5}{dt^3}$
r^{-1}	$-\frac{\cos \theta}{r \sin \theta}$	$-\frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r}$	$-\frac{1.3}{2.4} \frac{V^4}{c^4} \frac{1}{r} \sin^3 \theta \cos \theta$
r^0		$-\frac{1}{2} \frac{\Gamma}{c^2} \sin \theta$	$-\frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{V^2 \Gamma}{c^4} \sin^3 \theta$

(Suite).

	$\mathcal{H}_7 = \frac{1}{c^6} \frac{d^5B_7}{dt^5}$	$\mathcal{H}_9 = \frac{1}{c^8} \frac{d^7B_9}{dt^7}$	...
r^{-1}	$-\frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{V^6}{c^6} \frac{1}{r} \sin^5 \theta \cos \theta$	$-\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \frac{V^8}{c^8} \frac{1}{r} \sin^7 \theta \cos \theta$	...
r^0	$-\frac{1}{2} \frac{3.5}{2.4} \frac{V^4 \Gamma}{c^6} \sin^5 \theta$	$-\frac{1}{2} \frac{3.5.7}{2.4.6} \frac{V^6 \Gamma}{c^8} \sin^7 \theta$	...

Posons $\vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{H}}_1 + \vec{\mathcal{H}}_3 + \vec{\mathcal{H}}_5 + \vec{\mathcal{H}}_7 + \vec{\mathcal{H}}_9 + \dots$ le champ magnétique a pour expression :

$$(1) \quad \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t},$$

le champ électrique aura donc pour expression :

$$(2) \quad \vec{E} = \text{rot } \vec{\mathcal{E}};$$

en effet, en multipliant par $1/c$ les deux membres de la relation (2) et en la dérivant par rapport à t , et en tenant compte de (1) on a :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} = \text{rot} \vec{H},$$

on reconnaît là la première équation de Maxwell.

En effectuant la sommation suivant les différentes lignes, la première ligne peut s'écrire :

$$-\frac{\cos \theta}{r \sin \theta} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta + \frac{1.3}{2.4} \frac{V^4}{c^4} \sin^4 \theta + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{V^6}{c^6} \sin^6 \theta + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \frac{V^8}{c^8} \sin^8 \theta + \dots \right)$$

On reconnaît le développement de la fonction :

$$\varphi(r, \theta) = -\frac{\cos \theta}{r \sin \theta} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Le vecteur correspondant a pour expression :

$$\vec{\mathcal{C}} = -\frac{e}{r} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

La deuxième ligne peut s'écrire :

$$-\frac{1}{2} \frac{\Gamma}{c^2} \sin \theta \left(1 + \frac{3}{2} \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta + \frac{3.5}{2.4} \frac{V^4}{c^4} \sin^4 \theta + \frac{3.5.7}{2.4.6} \frac{V^6}{c^6} \sin^6 \theta + \dots \right).$$

On reconnaît le développement de la fonction :

$$\varphi'(r, \theta) = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma}{c^2} \sin \theta \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Le vecteur correspondant a pour expression :

$$\vec{\mathcal{C}'} = -\frac{e}{2} \frac{\Gamma}{c^2} \sin \theta \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

D'après la façon dont ces fonctions ont été formées, il suffit de les dériver une fois par rapport au temps et de les multiplier par $1/c$ pour avoir le champ magnétique. *Il suffira donc d'en prendre le rotationnel pour avoir le champ électrique.* Nous utiliserons la formule (6) du chapitre II que nous allons rappeler : soit un vecteur ayant pour expression :

$$\vec{B} = v \varphi(r, \theta),$$

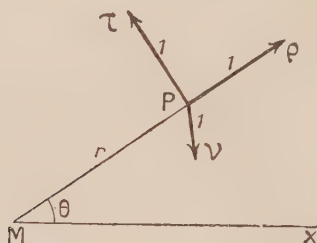


Fig. 17.

avec les notations du chapitre II et du trièdre mobile $P \begin{smallmatrix} \vec{\rho} \\ \vec{\tau} \\ \vec{v} \end{smallmatrix}$ (fig. 17). On a :

$$\text{rot } \vec{B} = \vec{\rho} E(r, \theta) + \vec{\tau} F(r, \theta),$$

avec :

$$E = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\dot{\varphi}}{r} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad F = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\dot{\varphi}}{r}.$$

Nous allons d'abord prendre le rotationnel du vecteur en $1/r$ ce qui donnera le terme en $1/r^2$ dû à la vitesse.

Composante tangentielle.

On a d'abord :

$$F = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\dot{\varphi}}{r} = 0.$$

La composante tangentielle du terme en $1/r^2$ est nulle.

Composante radiale.

On a :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{V^2}{c^2} \cos^2 \theta \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{3}{2}} \right]$$

et :

$$\frac{\varphi}{r} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Le champ électrique en $1/r^2$ a donc pour composante radiale :

$$E = \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{V^2}{c^2} \cos^2 \theta \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{3}{2}} \right]$$

qui se réduit à l'expression :

$$E = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

C'est la formule de Thomson, qui donne le champ électrique dû à la vitesse. Pour avoir le champ dû à l'accélération, il suffira de prendre le rotationnel du deuxième vecteur $\vec{H}$, qui contient l'accélération, on a :

Composante radiale.

On a :

$$\varphi' = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma}{c^2} \sin \theta \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi'}{\partial \theta} = & -\frac{1}{2} \frac{\Gamma \cos \theta}{c^2 r} \left[\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{3}{2}} \right. \\ & \left. + 3 \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{5}{2}} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\varphi'}{r} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma \cos \theta}{c^2 r} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

$$E' = -\frac{\Gamma \cos \theta}{c^2 r} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \frac{V^2 \Gamma}{c^4 r} \sin^2 \theta \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{5}{2}}$$

en ajoutant :

$$E' = -\frac{\Gamma \cos \theta}{c^2 r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{5}{2}}.$$

Composante tangentielle.

Soit F' la composante tangentielle du terme en $1/r$, on a :

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial r} = 0 \quad \text{et} \quad F' = -\frac{\varphi'}{r}$$

ou :

$$F' = \frac{1}{2} \frac{\Gamma}{c^2 r} \sin \theta \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

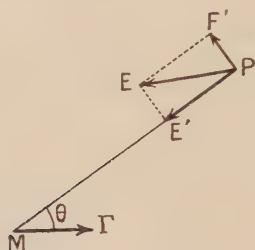


Fig. 18.

Le champ électrique dû à l'accélération a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{E} = & -\rho \frac{1}{r} \Gamma \frac{\cos \theta}{c^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{-\frac{5}{2}} \\ & + \frac{\tau}{2} \frac{\Gamma}{c^2 r} \sin \theta \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Il est disposé comme l'indique la figure 18. Nous signalons l'analogie de ce champ avec le champ d'un doublet électrique en mouvement uniforme de moment parallèle à la direction du mouvement et dont l'expression est :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{\rho}{r^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{-\frac{3}{2}} \right] \\ = -\frac{\rho}{r^3} \cos \theta \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{-\frac{5}{2}} \\ + \frac{\tau}{2} \frac{1}{r^3} \sin \theta \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

§ 5. Conclusion. — Considérons une charge électrique en mouvement le long d'un axe $x'x$, soit M sa position à l'instant t , $\vec{V}$ sa vitesse, $\vec{\Gamma}$ son accélération, $\vec{\Gamma}'$ $\vec{\Gamma}''$... $\vec{\Gamma}^{(n)}$... les dérivées successives de l'accélération, par rapport au temps ; c la vitesse de la lumière.

Le champ électrique et le champ magnétique en un point P de l'espace, à l'instant t , se présentent chacun sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances croissantes de r par l'intermédiaire des groupements sans dimension :

$$\gamma = \frac{\Gamma r}{c^2} \quad \gamma' = \frac{\Gamma' r^2}{c^3} \quad \gamma'' = \frac{\Gamma'' r^3}{c^4} \dots \quad \gamma^{(n)} = \frac{\Gamma^{(n)} r^{n+1}}{c^{n+2}} \dots$$

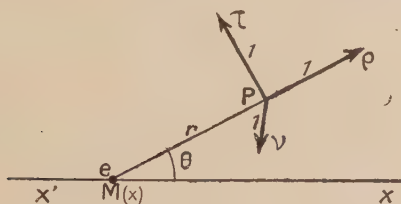


Fig. 19.

et de leurs puissances successives, et, dont les coefficients sont des fonction algébriques de $\beta = V/c$, de $\sin \theta$ et de $\cos \theta$, en posant $MP = r$ et en appelant θ l'angle qui amène Ox sur MP . Ces développements, limités aux premiers termes représentent le champ à faible distance de l'électron. Le nombre de termes qu'il convient de conserver, pour un mouvement donné, dépend évidemment de la distance r et de l'approximation que l'on s'est choisie. Nous avons poussé les calculs jusqu'aux termes en r^0 pour le champ magnétique et nous avons obtenu par la même occasion les termes en $1/r$ et en $1/r^2$, pour le champ électrique.

Il est commode d'exprimer les résultats avec les notations vectorielles, en les rapportant au trièdre unitaire trirectangle $P \rightarrow \rho \rightarrow \tau \rightarrow \nu$, défini au chapitre II. Nous rappelons (fig. 19) que $\vec{\rho}$

est dirigé suivant $\vec{MP}$, $\vec{\tau}$ est dans le plan PMx , le sens de rotation qui amène $\vec{\rho}$ sur $\vec{\tau}$ étant celui qui amène Mx sur MP , et que le trièdre est direct.

On a obtenu les résultats suivants ⁽¹⁾ :

Champ magnétique :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \vec{H} = v e \sin \theta & \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{V}{c} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{3}{2}} \right. \\ & - \frac{3}{2} \frac{1}{r} \frac{V\Gamma}{c^3} \cos \theta \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{5}{2}} \\ & - \frac{3.5}{2.4} \frac{V\Gamma^2}{c^5} \sin^2 \theta \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{7}{2}} \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{c^3} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{5}{2}} \dots \right\} \end{aligned} \right.$$

qui peut encore s'écrire :

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \vec{H} = v \frac{e}{r^2} \sin \theta & \left\{ \beta (1 - \beta^2) (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{3}{2}} \right. \\ & - \frac{3}{2} \beta \gamma \cos \theta (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{5}{2}} \\ & - \frac{3.5}{2.4} \beta \gamma^2 \sin^2 \theta (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{7}{2}} \\ & \left. - \frac{1}{2} \gamma' (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{5}{2}} \dots \right\} \end{aligned} \right.$$

Dans le cas du mouvement uniforme :

$$\Gamma = 0 \quad \Gamma' = 0 \quad \Gamma'' = 0 \quad \dots \quad \text{etc} \quad \dots$$

le champ se réduit à l'expression :

$$(3) \quad \vec{H} = v \frac{e}{r^2} \sin \theta \beta (1 - \beta^2) (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{3}{2}}$$

c'est la *formule de Thomson*, elle est alors valable dans tout l'espace.

Les lignes de force du champ magnétique sont des cercles centrés sur $x'x$.

(1) Nous rétablissons la charge e dans le résultat final.

Champ électrique :

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \vec{E} = \vec{\rho} \left\{ \frac{e}{r^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{3}{2}} \right. \\ - \frac{e}{r} \frac{\Gamma}{c^2} \cos \theta \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{5}{2}} \dots \left. \right\} \\ + \frac{\tau}{2} \frac{e}{r} \frac{\Gamma}{c^2} \sin \theta \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{3}{2}} \dots \end{aligned} \right.$$

Appelons $\vec{\rho} \mathcal{E}$ le terme en $\frac{1}{r^2}$, $\vec{\rho} \mathcal{E}' + \vec{\tau} \mathcal{F}'$ le terme en $\frac{1}{r}$, ces trois vecteurs sont disposés comme l'indique la figure 20.

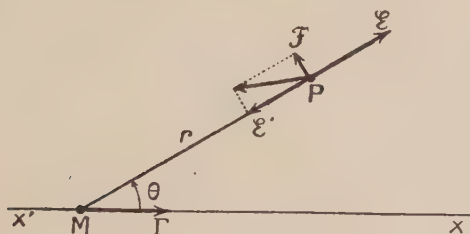


Fig. 20.

En introduisant les groupements sans dimension :

$$\beta = \frac{V}{c} \quad \gamma = \frac{\Gamma r}{c^2} \quad \dots \quad \text{etc} \quad \dots$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \vec{E} = \vec{\rho} \frac{e}{r^2} \left\{ (1 - \beta^2) (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{3}{2}} \right. \\ - e \gamma \cos \theta \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 \sin^2 \theta \right) (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{5}{2}} \dots \left. \right\} \\ + \frac{\tau e}{r^2} \left\{ \frac{1}{2} \gamma \sin \theta (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{3}{2}} + \dots \right\} \end{aligned} \right.$$

Lorsque le mouvement est uniforme, on retrouve la formule de Thomson :

$$\vec{E} = \vec{\rho} \frac{e}{r^2} (1 - \beta^2) (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{3}{2}}. \quad (6)$$

Cette formule est alors valable dans tout l'espace; la composante tangentielle a disparu.

A une distance de l'électron assez faible pour que l'on puisse négliger γ devant β , c'est encore la formule (6) qui intervient, le *champ électrique est radial au voisinage de*

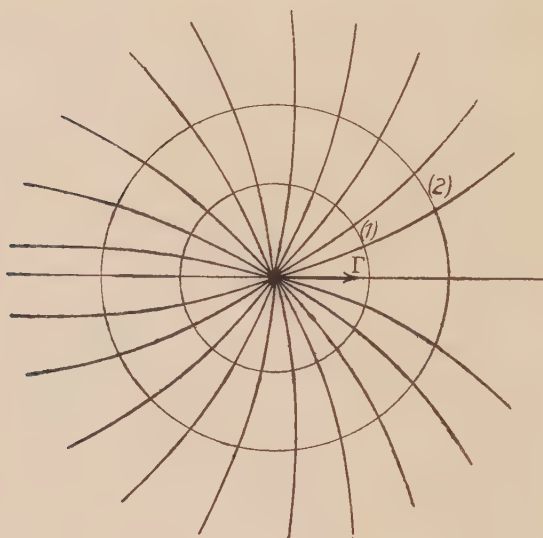


Fig. 21. — Lignes de forces du champ électrique de l'électron accéléré.

l'électron, ce sera la région intérieure à la sphère 1 (fig. 21). Plus loin, les lignes de forces s'incurvent, l'influence de l'accélération se manifeste, la composante tangentielle apparaît; cette correction est suffisante jusque dans la région limitée par la sphère 2, par exemple. A partir de là, il faudra tenir compte de γ^1 et de γ^2 etc . . .

L'approximation à laquelle nous nous sommes arrêtés est suffisante pour nous renseigner sur la forme des développements. On peut dans le cas de certains mouvements, autres

que le mouvement uniforme ⁽¹⁾. obtenir l'expression du champ dans tout l'espace, mais les termes en r^{-2} et en r^{-1} sont certainement les plus intéressants, car ils sont prépondérants dans toute la région de l'espace où ont lieu les actions mécaniques entre courants et les phénomènes d'induction électromagnétique par les courants variables, comme nous le montrerons au chapitre VII.

(¹) Oscillateur linéaire.

CHAPITRE V

Electron en mouvement quelconque. Champ à faible distance.

Soit M la position d'un électron à l'instant t , $\vec{V}$ sa vitesse, $\vec{\Gamma}$ son accélération (fig. 22). Nous nous proposons de calculer

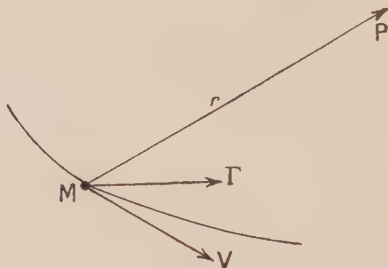


Fig. 22.

le champ en un point P de l'espace, en nous limitant aux termes en $\frac{1}{r^2}$ et en $\frac{1}{r}$. Nous utiliserons les méthodes du calcul vectoriel et nous poserons $\vec{MP} = \vec{r}$. On a par suite :

$$\vec{V} = -\frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma} = -\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Le champ électrostatique associé à l'électron de charge e a pour expression au point P :

$$\vec{E}_0 = e \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (1)$$

Nous avons vu au chapitre III, § 3, que l'on avait :

$$\frac{\vec{dE}_0}{dt} = -e \left(3 \frac{\vec{r}}{r^3} \frac{dr}{dt} - \frac{1}{r^3} \frac{d\vec{r}}{dt} \right). \quad (2)$$

Construisons le trièdre trirectangle unitaire $P \vec{\rho} \vec{\tau} \vec{\nu}$ utilisé au chapitre précédent et appelons θ l'angle que fait le vecteur unitaire $\vec{\rho}$ avec la vitesse $\vec{V}$. On a vu au chapitre III, § 3, que le champ $\frac{d\vec{E}_0}{dt}$ peut s'écrire :

$$\frac{d\vec{E}_0}{dt} = -\frac{eV}{r^3} (2 \vec{\rho} \cos \theta + \vec{\tau} \sin \theta).$$

On a vu également que le champ :

$$\vec{A}_0 = \frac{1}{r^3} (2 \vec{\rho} \cos \theta + \vec{\tau} \sin \theta)$$

était le terme fondamental de la série de tourbillons :

$$\vec{A}_0 \vec{B}_1 \vec{A}_2 \vec{B}_3 \dots \vec{A}_{2n} \vec{B}_{2n+1} \vec{A}_{2n+2} \dots$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{A}_0 &= \text{rot } \vec{B}_1 & \vec{B}_1 &= -\text{rot } \vec{A}_2 & \dots & \vec{A}_{2n} &= \text{rot } \vec{B}_{2n+1} \\ & & & & & & \vec{B}_{2n+1} &= -\text{rot } \vec{A}_{2n+2} \dots \end{aligned}$$

les vecteurs :

$$\vec{A}_0 \vec{A}_2 \vec{A}_4 \vec{A}_6 \dots \vec{B}_2 \vec{B}_3 \vec{B}_5 \dots$$

étant donnés par les formules :

$$\begin{aligned} \vec{A}_0 &= \frac{1}{r^3} (2 \vec{\rho} \cos \theta + \vec{\tau} \sin \theta) \\ \vec{A}_2 &= -\frac{1}{2!} \frac{1}{r} (2 \vec{\rho} \cos \theta - \vec{\tau} \sin \theta) \\ \vec{A}_4 &= -\frac{3}{4!} r (2 \vec{\rho} \cos \theta - 3 \vec{\tau} \sin \theta) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 \vec{A}_{2n} &= -\frac{2n-1}{2n!} \left[r^{2n-3} \vec{\rho} \cos \theta - (2n-1) \tau \sin \theta \right] \\
 &\dots \dots \dots \\
 \vec{B}_1 &= \frac{1}{r^2} \vec{v} \sin \theta \\
 \vec{B}_3 &= -\frac{1}{2!} \vec{v} \sin \theta \\
 \vec{B}_5 &= -\frac{3}{4!} r^2 \vec{v} \sin \theta \\
 &\dots \dots \dots \\
 \vec{B}_{2n+1} &= -\frac{2n-1}{2n!} r^{2n-2} \vec{v} \sin \theta. \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Les termes successifs $\vec{E}_2 \vec{E}_4 \dots \vec{E}_{2n} \dots$ du champ électrique et la suite des termes $\vec{H}_1 \vec{H}_2 \dots \vec{H}_{2n+1} \dots$ du champ magnétique étant donnés par les relations que nous rappelons pour mémoire :

CHAMP ÉLECTRIQUE

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_2 + \vec{E}_4 + \dots + \vec{E}_{2n} + \dots$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_2 &= \frac{e}{c^2} \frac{d}{dt} (\vec{V} \vec{A}_2) \quad \vec{E}_4 = \frac{e}{c^4} \frac{d^3}{dt^3} (\vec{V} \vec{A}_4) \dots \\
 \vec{E}_{2n} &= \frac{e}{c^{2n}} \frac{d^{2n-1}}{dt^{2n-1}} (\vec{V} \vec{A}_{2n}) \dots
 \end{aligned}$$

CHAMP MAGNÉTIQUE

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_3 + \vec{H}_5 + \dots + \vec{H}_{2n+1} + \dots$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \vec{H}_1 &= e \vec{V} \vec{B}_1 \quad \vec{H}_3 = \frac{e}{c^3} \frac{d^2}{dt^2} (\vec{V} \vec{B}_3) \dots \\
 \vec{H}_{2n+1} &= \frac{e}{c^{2n+1}} \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} (\vec{V} \vec{B}_{2n+1}) \dots
 \end{aligned}$$

Nous reviendrons aux notations vectorielles précédentes utilisées dans la formule (2) et nous mettrons les formules (3) et (4) sous la forme :

$$\begin{aligned} \nabla \vec{A}_2 &= \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{r} \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\vec{r}}{r^2} \frac{dr}{dt} \right) & \nabla \vec{A}_4 &= \frac{3}{4!} \left(3r \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{r} \frac{dr}{dt} \right) \\ \dots \nabla \vec{A}_{2n} &= \frac{2n-1}{2n!} r^{2n-4} \left[(2n-1)r \frac{d\vec{r}}{dt} - (2n-3)\vec{r} \frac{dr}{dt} \right] \dots \\ \nabla \vec{B}_1 &= -r^{-3} \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) & \nabla \vec{B}_3 &= \frac{1}{2!} r^{-1} \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \\ \nabla \vec{B}_5 &= \frac{3}{4!} r \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \dots & \nabla \vec{B}_{2n+1} &= \frac{2n-1}{2n!} r^{2n-3} \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \dots \end{aligned}$$

§ 2. Calcul du champ électrique.

PREMIER TERME. — C'est le champ électrostatique :

$$\vec{E}_0 = e \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

DEUXIÈME TERME. — Il a pour expression :

$$\vec{E}_2 = \frac{e}{c^2} \frac{d}{dt} (\nabla \vec{A}_2),$$

avec :

$$\nabla \vec{A}_2 = \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{r} \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\vec{r}}{r^2} \frac{dr}{dt} \right),$$

on a :

$$\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \nabla \vec{A}_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} - \frac{2}{r^3} \vec{r} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{\vec{r}}{r^2} \frac{d^2 r}{dt^2} \right] \quad (5)$$

Appelons θ l'angle que font entre eux les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{r}$, φ l'angle que font les vecteurs $\vec{\Gamma}$ et $\vec{r}$, ψ l'angle que font les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$ (fig. 23). On a :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -V \cos \theta. \quad (6)$$

En dérivant :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{r}}{r} \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2,$$

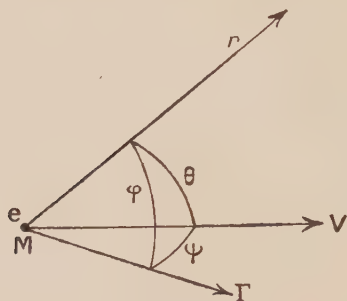


Fig. 23.

ou :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\Gamma \cos \varphi + \frac{V^2}{r} \sin^2 \theta \quad (7)$$

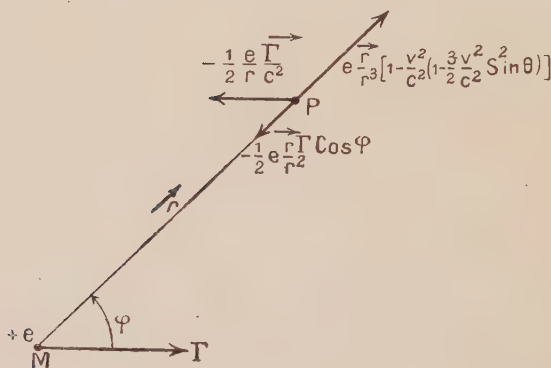


Fig. 24.

en portant les expressions (6) et (7) dans (5) on trouve :

$$\vec{E}_2 = -e \frac{V^2}{c^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right) \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{1}{2} \frac{e}{c^2 r} \left(\vec{\Gamma} + r^{-1} \Gamma \cos \varphi \vec{r} \right).$$

Si la vitesse est assez faible pour que l'on puisse négliger les termes en V^4/c^4 et les termes en $\frac{V^2\Gamma}{c^4}$ (C'est notamment le cas des électrons à l'intérieur de l'atome), le champ électrique de l'électron en mouvement quelconque, à faible distance de celui-ci, a pour expression :

$$(8) \quad \vec{E} = e \frac{\vec{r}}{r^3} \left[1 - \frac{V^2}{c^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right) \right] - \frac{1}{2} \frac{e}{c^2 r} (\vec{\Gamma} + r^{-1} \Gamma \cos \varphi \vec{r}).$$

Il suffit de faire $\varphi = 0$ dans cette expression, pour retrouver les premiers termes du développement de l'expression (4) § 5, chap. IV obtenue dans le cas du mouvement rectiligne. La disposition du champ est indiquée sur la figure 24, la charge a été supposée positive.

§ 3. Champ magnétique. — PREMIER TERME :

$$\vec{H}_1 = e \frac{V}{c} \vec{B}_1 = \frac{e}{r^3} \left(\vec{r} \times \frac{\vec{V}}{c} \right).$$

DEUXIÈME TERME :

$$\vec{H}_3 = \frac{e}{c^3} \frac{d^2}{dt^2} (\vec{V} \vec{B}_3) \quad \text{avec} \quad \vec{V} \vec{B}_3 = -\frac{1}{2!} r^{-1} \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right)$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{V} \vec{B}_3) &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(\vec{r} \times \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \right], \\ \frac{d^2}{dt^2} (\vec{V} \vec{B}_3) &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right) - \frac{2}{r^2} \frac{dr}{dt} \left(\vec{r} \times \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{2}{r^3} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 r}{dt^2} \right] \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \right\}. \end{aligned}$$

En remplaçant $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{d^2r}{dt^2}$ par leurs valeurs (6) et (7) et en multipliant par $\frac{e}{c^3}$:

$$\vec{H}_3 = -e \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{cr^3} \left[\frac{v^2}{c^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right) - \frac{1}{2} r \frac{\Gamma}{c^2} \cos \varphi \right] \\ + (\vec{r} \times \vec{\Gamma}) \frac{v \cos \theta}{c^2 r^2} - \frac{1}{2} \frac{\vec{v} \times \vec{\Gamma}}{c^2 r}.$$

Si la vitesse est assez faible pour que l'on puisse négliger les termes en v^5/c^5 et les termes en $\frac{v^2 \Gamma}{c^5}$ (électrons intérieurs à l'atome), on peut exprimer le champ magnétique à faible distance au moyen de la formule :

$$(9) \quad \vec{H} = \frac{e}{r^3} \left(\vec{r} \times \frac{\vec{v}}{c} \right) \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right) \right] \\ - \frac{1}{2} \frac{e}{r^2} \frac{\Gamma}{c^2} \cos \varphi \left(\vec{r} \times \frac{\vec{v}}{c} \right) \\ + \frac{e}{r^2} \frac{v}{c} \cos \theta (\vec{r} \times \vec{\Gamma}) - \frac{1}{2} \frac{e}{r} \left(\frac{\vec{v}}{c} \times \frac{\vec{\Gamma}}{c^2} \right).$$

Cette formule donne le champ magnétique de l'électron en mouvement accéléré, à faible distance, et lorsque la vitesse est petite par rapport à celle de la lumière.

Si on fait $\varphi = \theta$, $\psi = 0$ dans l'expression (9), on retrouve bien les premiers termes du développement de l'expression (1), § 5 du chapitre précédent, obtenue dans le cas du mouvement rectiligne.

§ 4. Note sur la théorie de Weber. — On se rappelle que Weber, s'inspirant des idées d'Ampère ⁽¹⁾ avait tenté d'expliquer les forces électromagnétiques et les phénomènes d'induction, en supposant que deux particules électriques en

⁽¹⁾ AMPÈRE. *Théorie mathématique des Phénomènes électrodynamiques*. Hermann, 1883, 97.

mouvement exerceraient l'une sur l'autre deux forces égales et opposées, dirigées suivant la droite qui les joint et ayant pour expression ⁽¹⁾ :

$$(10) \quad f = \frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{r}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right]$$

e et e' étant les charges de ces particules, r étant la distance qui les sépare, la force étant supposée positive lorsqu'elle tend à les écarter l'une de l'autre. Cette formule qui ne fait intervenir que la distance mutuelle de ces corpuscules est indépendante de tout système de référence.

Reprenons le cas de la figure 24. D'après Weber, la force exercée par la charge mobile sur une charge unitaire fixe placée en P est donnée par la formule (10), avec $e' = 1$. Cette force qui n'est autre que le champ électrique en P peut s'écrire en exprimant $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{d^2r}{dt^2}$ par leurs valeurs (6) et (7), et en appelant $\vec{\Gamma}_r$ la composante de $\vec{\Gamma}$ suivant MP :

$$(11) \quad \vec{f} = e \frac{\vec{r}}{r^3} \left[1 - \frac{V^2}{c^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right) \right] - \frac{e}{c^2 r} \vec{\Gamma}_r.$$

D'autre part, l'expression (8) calculée à partir des équations de Maxwell peut s'écrire en appelant $\vec{\Gamma}_r$ la projection de $\vec{\Gamma}$ sur un plan perpendiculaire à MP :

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \vec{E} &= e \frac{\vec{r}}{r^3} \left[1 - \frac{V^2}{c^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right) \right] \\ &\quad - \frac{e}{c^2 r} \left(\vec{\Gamma}_r - \frac{1}{2} \vec{\Gamma}_t \right). \end{aligned} \right.$$

Comparons les expressions (11) et (12). Portons d'abord notre attention sur les termes dus à la vitesse. Ils diffèrent par un terme en V^2/c^2 indépendant de θ . Ils expliquent cependant tous deux les forces électrodynamiques exercées par un

⁽¹⁾ WEBER. *Electrodynamische Maassbestimmungen*, 305.

courant fermé sur un élément de courant ou un autre courant fermé ⁽¹⁾. Pour le montrer, on pourrait dans les deux cas commencer par calculer, à l'aide d'un changement de système de référence, la force exercée par un électron en mouvement sur un autre électron en mouvement, en fonction de leurs vitesses respectives, puis en déduire la force exercée par un élément de courant sur un élément de courant, enfin, intégrer le long d'un ou de deux contours fermés.

La formule de Weber a été construite dans ce but, en suivant à rebours la marche que nous venons d'indiquer et en employant les méthodes de la mécanique de Newton : égalité de l'action et de la réaction et cinématique de Galilée ; il faudra donc utiliser les mêmes méthodes pour effectuer le calcul que nous avons en vue.

La formule (12) peut être traitée d'une manière parallèle, bien que ce ne soit pas la plus indiquée, mais il faut utiliser la cinématique de Lorentz-Einstein, construite en vue des équations de Maxwell, pour effectuer le changement de système de référence. Les forces exercées l'une sur l'autre par deux électrons en mouvement ne sont plus égales ni opposées, on trouve les mêmes résultats qu'en passant par l'intermédiaire du champ électromagnétique, à l'aide de la loi de Biot et Savart et de la loi de Laplace.

Considérons maintenant la force due à l'accélération. La composante radiale que nous avons mise en évidence est identique à la force de Weber. La composante tangentielle a échappé à Weber car, dérivant d'un potentiel, elle ne produit pas de force électromotrice d'induction le long d'un circuit fermé.

La formule (12), ou plutôt la formule (8) dont elle provient, est plus avantageuse que la formule de Weber parce qu'elle se rattache aux phénomènes de propagation, par l'intermé-

(1) Lorsqu'on suppose le régime permanent.

diaire des équations de Maxwell. Nous signalons toutefois que
le terme en $\frac{r}{r^3}$ de la formule (11) représente une première
approximation d'une solution non classique de ces équations (voir la note sur les solutions non classiques, p. 92).

CHAPITRE VI

Applications.

§ 1. Retour à l'électrostatique. — Nous avons admis qu'une charge électrique élémentaire e occupait la position M produisant en un point P de l'espace le champ électrostatique ou champ de Coulomb :

$$\vec{E} = e \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (1)$$

Cette extension au domaine microscopique des résultats observés sur des charges incomparablement plus grandes est une pure hypothèse ; en effet, les charges étudiées en électrostatiques sont composées d'électrons libres *qui ne sont pas immobiles*, mais qui sont au contraire animés de mouvements désordonnés et très rapides ; tout ce qu'on peut dire est que la vitesse moyenne et ses dérivées moyennes par rapport au temps sont nulles. Il convient par suite de *vérifier* que les champs élémentaires que nous avons obtenus redonnent bien les lois de l'électrostatique. Pour le démontrer, nous montrerons au préalable que le flux d'un électron en mouvement quelconque, à travers une sphère dont il occupe le centre, a pour expression :

$$\Phi = 4\pi e,$$

e étant la charge de l'électron. C'est là une extension du théorème de Gauss.

Le champ ayant une divergence nulle et n'ayant pas d'autre singularité que le point M, le rayon de la sphère n'intervient pas dans l'expression du flux ; on pourra donc

la prendre aussi petite que l'on veut et négliger les champs en $r^{-1}r^0r^1 \dots r^n \dots$ devant le champ en r^{-2} qui a pour expression :

$$\vec{E} = e \frac{\vec{r}}{r^3} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{3}{2}}$$

et qui seul possède un flux différent de zéro à travers la sphère.

Pour évaluer ce dernier, découpons sur la sphère une zone comprise entre les cônes de révolution autour de $x'x$,

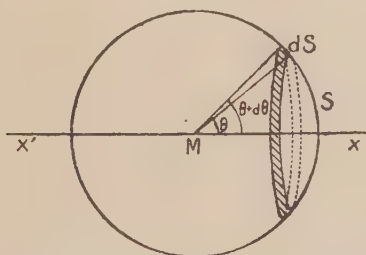


Fig. 25.

d'ouvertures θ et $\theta + d\theta$ (fig. 25). L'aire de la calotte sphérique limitée par le premier cône a pour expression :

$$S = 2\pi r^2 (1 - \cos \theta).$$

L'aire de la zone élémentaire comprise entre les cônes d'ouverture θ et $\theta + d\theta$ a pour expression :

$$dS = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta.$$

Le flux élémentaire à travers dS a pour expression :

$$d\Phi = 2\pi e \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{3}{2}} \sin \theta d\theta.$$

Le flux total a pour expression :

$$\Phi = 4\pi e \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{3}{2}} \sin \theta d\theta$$

en développant :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{-\frac{3}{2}} \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta + \frac{3}{2} \frac{V^2}{c^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta d\theta + \dots \\ & \quad + \dots \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots 2p + 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1} \theta d\theta + \dots \end{aligned}$$

Ces intégrales sont bien connues; elles ont pour valeur :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = 1 \qquad I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta = \frac{2}{1.3}$$

$$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta d\theta = \frac{2.4}{1.3.5}$$

$$\dots I_{2p+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1} \theta d\theta = \frac{2.4.6 \dots 2p \dots}{1.3.5 \dots 2p+1 \dots}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{-\frac{3}{2}} \sin \theta d\theta \\ &= 1 + \frac{V^2}{c^2} + \frac{V^4}{c^4} + \frac{V^6}{c^6} + \dots + \frac{V^{2n}}{c^{2n}} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \end{aligned}$$

d'où :

$$\Phi = 4\pi e$$

C. Q. F. D.

Soit maintenant un volume $d\tau$ entourant un point M contenant un grand nombre d'électrons (soit N), en état d'agi-

tation désordonnée et proposons-nous de calculer le champ en un point P situé à une distance $MP = r$, grande par rapport aux dimensions de l'élément $d\tau$. Ce champ sera radial par raison de symétrie ; le flux à travers une sphère de centre M de rayon r , ayant pour valeur $4\pi Ne$, on en déduit que la valeur du champ est bien :

$$E = \frac{Q}{r^2}$$

$Q = Ne$ étant la somme algébrique des charges contenues dans l'élément $d\tau$.

Il est donc permis d'attribuer au champ de l'électron immobile, la valeur :

$$\vec{E} = e \frac{\vec{r}}{r^3}$$

adoptée au début de cette étude, mais si cette expression convient, elle n'est pas la seule à convenir, on pourrait lui ajouter un champ de dipôle de moment arbitraire, un champ de quadrupôle etc..., sans rien changer, tous ces champs ayant un flux nul à travers une surface fermée, même si elle entoure le point singulier du champ.

§ 2. Application à l'électromagnétisme. Lois de l'induction.

— Soit un circuit (c) parcouru par un courant électrique variable d'intensité i . Soit n le nombre

d'électrons libres par unité de longueur de fil, $\vec{V}$ leur vitesse moyenne, $\vec{\Gamma}$ leur accélération moyenne. On a évidemment :



$$\vec{i} = ne\vec{V}$$

et

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = ne\vec{\Gamma}$$

(e étant la charge élémentaire). La vitesse moyenne est toujours suffisamment faible pour que l'on puisse négliger le rapport $\frac{V}{c}$ devant l'unité. Si on admet que le champ élec-

trique du courant est égal à la somme des champs des électrons libres qui le composent, ceux-ci étant supposés animés de la vitesse moyenne et de l'accélération moyenne, le champ à faible distance du circuit, ou plus exactement pour les faibles valeurs de $\frac{\Gamma r}{c^2}$, se compose du champ en $\frac{1}{r^2}$ qui se réduit au champ électrostatique produit par la distribution des potentiels le long du fil, et du champ en $1/r$, dû à l'accélération, qui, vu la faible valeur de V/c , se réduira à son premier terme ⁽¹⁾ :

$$\vec{E} = -\frac{1}{2} \frac{ne}{c^2} \int_c \left(\frac{1}{r} \vec{\Gamma} + \frac{r}{r^2} \Gamma \cos \theta \right) ds$$

(1) Pour montrer qu'on peut négliger les termes d'ordre supérieur, on peut raisonner comme il suit :

Il faut comparer la distance r à la longueur :

$$\Lambda = \frac{c^2}{\Gamma}.$$

Supposons que dans le premier circuit l'électricité oscille avec période T . Alors en un temps $T/2$ la vitesse de l'électron varie de $+V$ à $-V$ et on aura une valeur moyenne de Γ en posant :

$$\Gamma = \frac{2V}{\frac{T}{2}} = \frac{4V}{T}.$$

Donc en ordre de grandeur :

$$\Lambda \approx \frac{c^2 T}{V}.$$

Comme $V \leq c$, on a :

$$\Lambda \geq cT = \lambda$$

car cT est la longueur d'onde λ de l'onde électromagnétique émise par l'oscillation des électrons.

Si d désigne la distance moyenne des deux circuits couplés, on a le droit de négliger les termes d'ordre supérieur si :

$$d \ll \Lambda \quad \text{et a fortiori si } d \ll \lambda.$$

Il est visible que cela est réalisé pour toutes les fréquences industrielles ou même pour les ondes longues de la T. S. F., la distance d étant pratiquement de l'ordre du mètre (ce raisonnement est dû à M. Louis de Broglie).

$\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$ sont forcément dirigés suivant la tangente au fil. Soient V et Γ les valeurs algébriques de ces vecteurs, comptés suivant un sens choisi arbitrairement le long du fil ; soit $\vec{ds}$ un élément d'arc, ds sa valeur absolue. On a évidemment :

$$\vec{\Gamma} ds = \vec{\Gamma} d\vec{s}$$

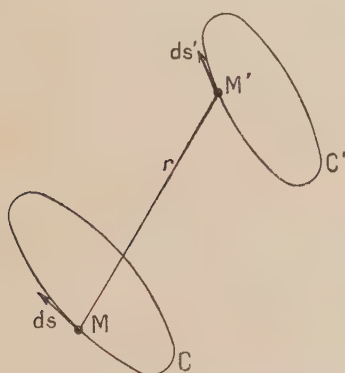


Fig. 26.

L'intégrale précédente s'écrira par suite :

$$E = \frac{1}{2} ne \frac{\Gamma}{c^2} \left[\int_C \frac{\vec{ds}}{r} + \int_C \vec{r} \frac{\cos \theta}{r^2} ds \right].$$

On peut encore écrire, en tenant compte de ce que

$\cos \theta = \frac{\vec{r} \cdot \vec{ds}}{r^2}$ et en exprimant i en unités électromagnétiques :

$$\vec{E} = -\frac{1}{2} \frac{di}{dt} \left\{ \int_C \frac{\vec{ds}}{r} + \int \vec{r} \frac{(\vec{r} \cdot \vec{ds})}{r^3} \right\}.$$

Ce champ ne dérive pas d'un potentiel et sa circulation le long des circuits conducteurs fermés produit les forces électromotrices d'induction qui donnent naissance à des courants. Si on veut les évaluer le long d'un circuit C' (fig. 26), il

suffit de remarquer la f. e. m. élémentaire induite le long d'un élément d'arc ds' a pour expression :

$$dv = \vec{E} \cdot \vec{ds}' = \frac{1}{2} \frac{di}{dt} \left\{ \int_c \frac{\vec{ds} \cdot \vec{ds}'}{r} + \int_c (\vec{r} \cdot \vec{ds}') (\vec{r} \cdot \vec{ds}) \right\}.$$

On démontre (voir la note à la fin du paragraphe) que les deux intégrales ont la même valeur, on a donc :

$$v = \frac{di}{dt} \int_c \int_{c'} \frac{\vec{ds} \cdot \vec{ds}'}{r} = M \frac{di}{dt} \quad (1)$$

avec :

$$M = \int_c \int_{c'} \frac{\vec{ds} \cdot \vec{ds}'}{r}.$$

On reconnaît dans cette intégrale l'expression du coefficient d'induction mutuelle et la formule (1) n'est autre que la *formule de Neuman*.

NOTE SUR LES SOLUTIONS NON CLASSIQUES

La méthode d'intégration que nous venons d'exposer et d'utiliser est basée sur l'emploi d'une série de tourbillons ayant pour terme fondamental un champ de doublet. La connaissance du terme fondamental n'est toutefois pas suffisante pour déterminer les termes successifs; chaque terme étant défini par sa divergence (nulle) et par son tourbillon, on pourrait en effet lui ajouter un terme arbitraire sans divergence ni tourbillon. La série du chapitre II est néanmoins la seule admettant un terme général formé par le produit d'une puissance de r par un binôme en $\sin \theta$ et $\cos \theta$. Si on veut s'en écarter, on tombe sur des fonctions fractionnaires de $\sin \theta$ et $\cos \theta$, admettant des singularités gênantes. On obtiendrait ainsi des solutions non classiques dont la discussion est très délicate et n'a pas encore été traitée avec la rigueur qu'exige le problème, toutefois quelques résultats semblent acquis :

Le cas du mouvement uniforme ne soulève pas de difficulté et admet la solution générale :

$$\vec{E} = \frac{\vec{r}}{r^3} f\left(\frac{V}{c}\right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{-\frac{3}{2}} \quad (\text{champ électrique})$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{E} \quad (\text{champ magnétique})$$

$f\left(\frac{V}{c}\right)$ étant une fonction arbitraire de V/c . Ces formules généralisent les formules de Thomson que l'on retrouve pour $f\left(\frac{V}{c}\right) = 1 - \frac{V^2}{c^2}$. Signalons parmi les solutions non classiques celles que l'on obtient en prenant $f\left(\frac{V}{c}\right) = 1 - \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \dots$ et qui permet de retrouver très simplement la formule d'Ampère en composant les forces exercées entre les électrons et centres positifs d'un élément de courant sur les électrons et centres positifs d'un autre élément de courant, à l'aide de la cinématique de Galilée (R. Reulos. *C. R. Ac. des Sc.* (1), 19 mars 1934, p. 1137).

Les difficultés apparaissent lorsque le mouvement n'est plus uniforme, les termes contenant l'accélération et ses

(1) L'article en question possède quelques erreurs typographiques que nous avons signalées dans le numéro suivant, et que nous rappellerons ici :

P. 1138, la formule (2) s'écrit :

$$f = \frac{ee'}{r^2} \left[1 + \frac{v^2}{c^2} (b^2 \sin^2 \theta + \dots)\right]$$

la formule (3) contient $dsds'$ en facteur dans ses deux membres.

P. 1139, 2^e ligne, lire :

$$dF_x = ie' \frac{\partial}{\partial r^3} [2b_2(dx dx' + \dots) + \frac{a^2}{r^2} (2x dx + \dots)(x dx' + \dots)]$$

5^e ligne, lire :

$$(x dx' + y dy' + z dz').$$

7^e ligne, lire :

$$\left(\alpha - \frac{3}{2}\right)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}(2x dx + \dots)$$

dérivées par rapport au temps admettent des singularités pour certaines valeurs de θ , c'est pourquoi, malgré quelques résultats encourageants qui ne sont peut-être que l'effet du hasard il semble dès maintenant que les solutions non classiques ne sauraient être retenues et que seule, la suite de tourbillons étudiée au chapitre II donne des résultats ayant une signification physique.

NOTE

DÉMONSTRATION DE LA FORMULE

$$\int_{c'} \int_c \frac{\vec{ds} \vec{ds'}}{r} = \int_{c'} \int_c \frac{(\vec{r} \cdot \vec{ds})(\vec{r} \cdot \vec{ds'})}{r^3}.$$

Nous associerons à l'élément $\vec{ds}$ issu d'un point M du circuit (c), un champ vectoriel défini en un point quelconque M' de l'espace de la manière suivante :

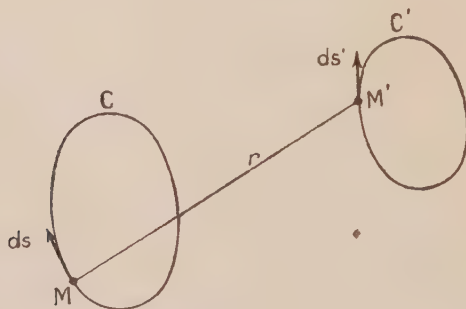


Fig. 27.

On pose $MM' = r$, on appelle θ l'angle qui amène ds sur r et on construit dans le plan de ces deux vecteurs le vec-

teur $\vec{dF}$ ayant son origine en M, dirigé perpendiculairement à r , et ayant pour longueur :

$$dF = \frac{ds \sin \theta}{r}.$$

Nous le supposons en outre dirigé dans le sens correspondant au sens positif de θ (fig. 28). Ce vecteur dérive d'un potentiel, en effet, il est le gradient de la fonction :

$$dU = -\cos \theta ds.$$

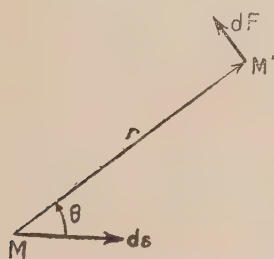


Fig. 28.

En utilisant les notations vectorielles, on peut écrire :

$$\vec{dF} = -\left(\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{ds}\right) \times \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{1}{r^3} [\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{ds})].$$

Si on associe ce champ élémentaire à tous les éléments du circuit C, on devra associer au circuit le champ :

$$\vec{F} = \int_C \frac{\vec{r}}{r^3} \times (\vec{r} \times \vec{ds}).$$

Nous allons transformer cette expression à l'aide de la formule bien connue en géométrie vectorielle :

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

entre trois vecteurs $\vec{u} \vec{v} \vec{w}$ quelconques. On a de même :

$$\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{ds}) = (\vec{r} \cdot \vec{ds}) \vec{r} - r^2 \vec{ds}.$$

On a donc :

$$\vec{F} = \int_c \frac{\vec{r} \cdot \vec{ds}}{r^3} \vec{r} - \int_c \frac{\vec{ds}}{r}.$$

Ce champ dérive d'un potentiel puisqu'il est la somme de champs élémentaires dérivant d'un potentiel; sa circulation le long d'un deuxième circuit c' est nulle, on a :

$$\int_{c'} \vec{F} \cdot \vec{ds}' = \int_{c'} \int_c \frac{(\vec{r} \cdot \vec{ds}) (\vec{r}' \cdot \vec{ds}')}{r^3} - \int_{c'} \int_c \frac{\vec{ds} \cdot \vec{ds}'}{r} = 0$$

On a bien :

$$\int_{c'} \int_c \frac{(\vec{r} \cdot \vec{ds}) (\vec{r}' \cdot \vec{ds}')}{r^3} = \int_{c'} \int_c \frac{\vec{ds} \cdot \vec{ds}'}{r}$$

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

Nous donnons ci-après la liste de quelques ouvrages ayant traité le problème du champ électromagnétique associé aux charges électriques en mouvement.

Max ABRAHAM. — *Annalen der Physik*, 40 (1903), 155

Paul HERTZ. — *Physik Zeitschrift* (1903).

KAUFMANN. — *Götting. Nachr., math. phys. Klasse* (1903), 90.

LANDEVIN. — Sur l'origine des radiations et l'inertie électromagnétique. *J. de Physique*, 4 (mars 1905).

J. LARMOR. — *Ether and matter*, 227 et *Phil. Magazine*, 44 (1897), 503.

LIENARD. — *L'éclairage électrique*, 2, 9 et 16 juillet 1898.

H. A. LORENTZ. — *Archives Néerlandaises*, 25 (1892), 363. — *The Theory of electrons*. Teubner 1916.

J. J. THOMSON. — *Recent Researches* (1892).

K. SCHWARTZSCHILD. — *Götting. Nachr., math. physik Klasse*, (1903), 90.

WIECHERT. — Lorentz Festschrift. *Arch. Néerlandaises* [2], 1900, 549.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Diffraction des électrons.

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 29 juin 1936,

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

CH. MAURAIN.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

S. CHARLÉTY.

